

§ 2. Обыкновенные дроби

2.1. Понятие обыкновенной дроби

Обыкновенная дробь – это числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, например $\frac{12}{17}, \frac{15}{8}$

Число m называется **числителем дроби**, n – **знаменателем**.

Запись $\frac{m}{n}$ имеет и другой вариант – $m:n$.

Определение 1. Дробь $\frac{m}{n}$ называется **правильной**, если ее числитель меньше знаменателя ($m < n$), и **неправильной**, если ее числитель больше знаменателя или равен ему ($m \geq n$).

Всюкую неправильную дробь можно представить в виде смешанного числа (натурального числа и правильной дроби) или **в виде натурального числа**.

Пример 1. Представить неправильную дробь в виде смешанного числа: а) $\frac{28}{5}$; б) $\frac{43}{13}$; в) $\frac{16}{4}$.

Решение.

$$\text{а) } \frac{28}{5} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{на знаменатель уголком} \\ \begin{array}{r} - 28 \overline{) 5} \\ \underline{25} \\ 3 \leftarrow \text{остаток} \end{array} \end{array} \right\} = 5 \frac{3}{5} \text{ (смешанное число);}$$

$$\text{б) } \frac{43}{13} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{на знаменатель уголком} \\ \begin{array}{r} - 43 \overline{) 13} \\ \underline{39} \\ 4 \leftarrow \text{остаток} \end{array} \end{array} \right\} = 3 \frac{4}{13} \text{ (смешанное число);}$$

$$\text{в) } \frac{16}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Разделим числитель} \\ \text{на знаменатель уголком} \\ \begin{array}{r} - 16 \overline{) 13} \\ \underline{16} \\ 0 \end{array} \end{array} \right\} = 4 \text{ (натуральное число).}$$

2.2. Равенство дробей. Основное свойство дроби

Определение 2. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются **равными**, если $ad = cd$.

Например, дробь $\frac{3}{7}$ равна дроби $\frac{9}{21}$ ($\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$), так как $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$ ($63 = 63$).

Основное свойство дроби: Если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a : k}{b : k}.$$

Например,

$$\frac{15}{20} = \frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100},$$

$$\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, $\frac{15}{20} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

Замечание 1. Замену дроби другой, равной данной, но с меньшим числителем и меньшим знаменателем, называют **сокращением дроби**.

2.3. Приведение дробей к общему знаменателю

Преобразование дробей, при котором дроби заменяются на равные с одинаковыми знаменателями, называется **приведением дробей к общему знаменателю**.

Замечание 1. Обычно стараются привести дроби к **наименьшему общему знаменателю**.

Пример 2. Привести дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$ к наименьшему общему знаменателю.

Решение.

Знаменатели дробей 3 и 8.

1. Найдем кратные чисел 3 и 8:

3: 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24...

8: 8; 16; 24; 32;...

2. Наименьшее общее кратное чисел 3 и 8 – НОК (3, 8)=24.

3. Приведем дроби к общему знаменателю 24 (НОК (3,8)). Для этого найдем дополнительные множители для каждой дроби:

24:3=8 – дополнительный множитель для первой дроби;

24:8=3 – дополнительный множитель для второй дроби,

и воспользуемся основным свойством дроби:

$$\frac{2 \overset{8/}{}}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24};$$

$$\frac{15 \overset{3/}{}}{8} = \frac{15 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{45}{24}.$$

Таким образом, дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$ приведены к общему знаменателю:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}; \quad \frac{15}{8} = \frac{45}{24}.$$

2.4. Арифметические действия над обыкновенными дробями

1. Сложение и вычитание дробей:

а) **сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями** выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+b}{b}; \quad (2.1)$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-b}{b} \quad (2.2)$$

б) **если знаменатели различны**, то дроби сначала приводят к **наименьшему общему знаменателю**, а затем применяют соответствующую формулу – (2.1) или (2.2).

Пример 3. Сложить дроби: а) $\frac{5}{11}$ и $\frac{3}{11}$; б) $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$

Решение.

а) так как дроби $\frac{5}{11}$ и $\frac{3}{11}$ имеют общий знаменатель, то для сложения дробей применяем формулу (2.1):

$$\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{5+3}{11} = \frac{8}{11};$$

б) знаменатели дробей $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$ – различны. Следовательно, приведем дроби к общему знаменателю, а затем воспользуемся формулой (3.1):

$$\frac{7}{24} + \frac{11}{30} = \left\{ \begin{array}{l} \text{НОК}(24, 30) = 120 \\ 120:24 = 5 - \text{д.м.1 дроби} \\ 120:30 = 4 - \text{д.м.2 дроби} \end{array} \right\} = \frac{7 \cancel{24}^5}{24} + \frac{11 \cancel{30}^4}{30} = \frac{35}{120} + \frac{44}{120} = \frac{35+44}{120} = \frac{79}{120}.$$

2. Умножение обыкновенных дробей

Умножение обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}. \quad (2.3)$$

Например, $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 11} = \frac{12}{55}.$

3. Деление обыкновенных дробей

Деление обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}. \quad (2.4)$$

Например, $\frac{2}{3} : \frac{7}{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}.$

Пример 4. Найти значение числового выражения $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} + \frac{7}{8} : \frac{5}{6} - \frac{11}{30}.$

Решение.

$$1) \frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4 \cdot \cancel{12}^4}{\cancel{9}_3 \cdot 5} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Сократим числитель и} \\ \text{знаменатель дроби на 3} \end{array} \right\} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15};$$

$$2) \frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 6}{8 \cdot 5} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Сократим числитель и} \\ \text{знаменатель дроби на 2} \end{array} \right\} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20};$$

$$3) \frac{16}{15} + \frac{21}{20} - \frac{11}{30} = \left\{ \begin{array}{l} \text{НОК}(15, 20, 30) = 60 \\ 60:15 = 4 - \text{д.м.1 дроби} \\ 60:20 = 3 - \text{д.м.2 дроби} \\ 60:30 = 2 - \text{д.м.3 дроби} \end{array} \right\} = \frac{16 \cancel{15}^4}{15} + \frac{21 \cancel{20}^3}{20} - \frac{11 \cancel{30}^2}{30} = \frac{64}{60} + \frac{63}{60} - \frac{22}{60} = \frac{64+63-22}{60} = \frac{105}{60} = \frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4}.$$

Пример 5. Выполнить действия: а) $2\frac{1}{7} + 3\frac{2}{3}$; б) $1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{7}.$

Решение:

а) обратим каждое из смешанных чисел в неправильную дробь, а затем выполним сложение:

$$2\frac{1}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 1}{7} = \frac{15}{7}; \quad 3\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{11}{3};$$

$$2\frac{1}{7} + 3\frac{2}{3} = \frac{15}{7} + \frac{11}{3} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Приведем дроби к общему} \\ \text{знаменателю} \\ \text{НОК}(7, 3) = 21 \\ 21:7 = 3 - \text{д.м.1 дроби} \\ 21:3 = 7 - \text{д.м.2 дроби} \end{array} \right\} = \frac{15 \cancel{7}^3}{7} + \frac{11 \cancel{3}^7}{3} = \frac{45}{21} + \frac{77}{21} = \frac{122}{21} = \left\{ \begin{array}{l} \text{122} \overline{) 21} \\ \underline{- 122} \\ 105 \\ \underline{- 105} \\ 17 \end{array} \right\} = 5\frac{17}{21};$$

б) обратим каждое из чисел в неправильную дробь:

$$1\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{7}{5}; \quad 2\frac{1}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 1}{7} = \frac{15}{7}.$$

$$\text{Значит, } \frac{7}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{7 \cdot 15}{5 \cdot 7} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Сократим числитель и} \\ \text{знаменатель дроби на } 7 \cdot 5 \end{array} \right\} = 3.$$

Задания для самостоятельного решения

$$1) 3\frac{7}{11} : \left(\frac{2}{11} + 2\frac{14}{19} \right);$$

$$2) \frac{\left(1\frac{11}{18} + 1\frac{19}{24} \right) \cdot \frac{16}{49}}{37\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2} - 3\frac{5}{6}}.$$

$$\text{Ответы: } 1) 1\frac{13}{25}; 2) \frac{20}{123}.$$