

ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ

§ 1. Функции

1.1. Основные определения

Пусть даны два множества X и Y .

Если каждому значению x из множества X по некоторому правилу или закону f поставлено в соответствие единственное значение y из множества Y , то говорят, что на множестве X задана **функция** $y = f(x)$.

Переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом** функции.

Переменную y – **зависимой переменной** или **значением функции**.

Все значения, которые принимает **независимая переменная** x , образуют **область определения функции**. Область определения функции обозначается D_f .

Все значения, которые принимает **переменная** $y = f(x)$ при $x \in D_f$ образуют **область значения функции**. Область значения функции обозначается E_f .

Способы задания функции

1. Табличный

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

2. Графический

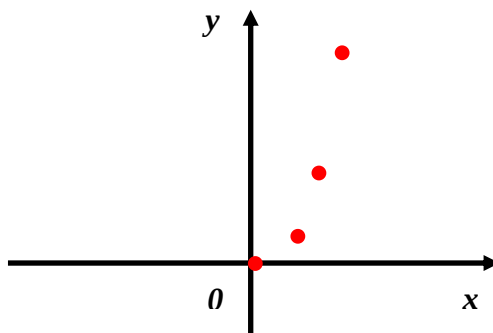


Рисунок 1

3. Аналитический

а) $y = x^2$; б) $y = \frac{1}{x}$; в) $y = \sqrt{x-2}$ и т.д.

Аналитический способ задания является наиболее употребительным. Функция задается с помощью формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ – некоторое выражение с переменной x .

Областью определения функции, заданной формулой $y = f(x)$, называют **множество значений переменной** x , при которых **формула имеет смысл** (все действия, указанные формулой можно выполнить).

Пример 1. Найти область определения функции: а) $y = x^2 + 2x - 1$; б) $y = \frac{1}{x-2}$; в) $y = \frac{x}{3-2x}$; г) $y = \sqrt{x}$; д) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$.

Решение.

а) выражение $x^2 + 2x - 1$ определено при всех значениях x . Таким образом, **область определения функции** $D_f = (-\infty; +\infty)$;

б) выражение $\frac{1}{x-2}$ определено при всех значениях x , кроме того значения, которое обращает знаменатель в нуль, т.е. $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ (рис. 2). Следовательно, **область определения функции** $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

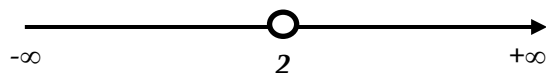


Рисунок 2

в) **область определения данной функции** находим аналогично предыдущему случаю:

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\neq 0 \\ -2x &\neq -3/(-2) \\ x &\neq 1,5. \end{aligned}$$

Следовательно, **область определения функции** $D_f = (-\infty; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$ (рис. 3);

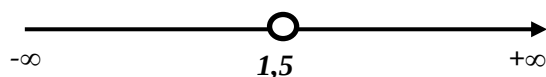


Рисунок 3

г) выражение $\sqrt{x}$ определено при всех значениях $x \geq 0$. Таким образом, $D_f = [0; +\infty)$;

д) выражение определено $\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ при выполнении двух условий $x+2 \geq 0$ и $x \neq 0$, т.е.:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

На рисунке 4 представлено множество все точек, удовлетворяющих этим условиям. Следовательно, **область определения функции** $D_f = [-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

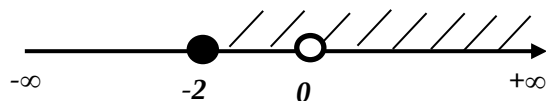


Рисунок 4

Определение 1. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости Oxy координатами (x, y) , где $x \in D_f$, а $y = f(x) \in E_f$.

На практике для построения **графика функции** составляют **таблицу значений функции** при некоторых значениях **аргумента**, наносят на плоскость Oxy соответствующие точки и соединяют полученные точки линией.

Пример 2. Построить график функции $y = x$.

Решение.

График функции $y = x$ является прямая линия. Для построения прямой достаточно выбрать две точки: при $x = 0 \Rightarrow y = 0$; при $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Заносим полученные значения в таблицу

x	0	1
y	0	1

и строим график функции (рис. 5).

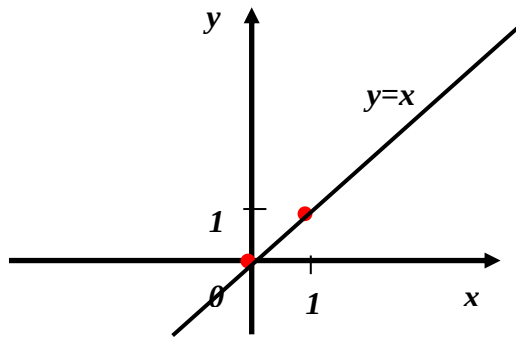


Рисунок 5

Пусть дана функция $y = f(x)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X , если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (рис. 6).

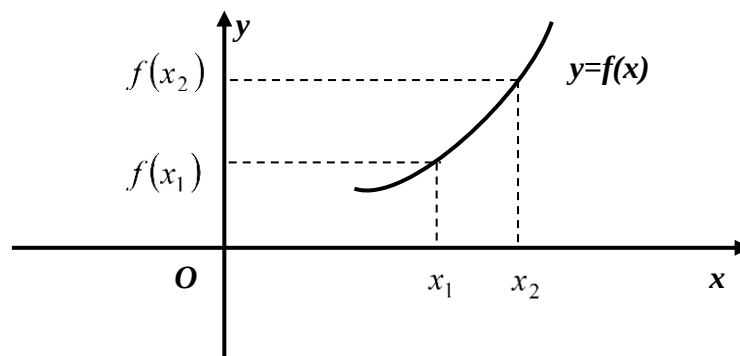


Рисунок 6

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X , если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 7).

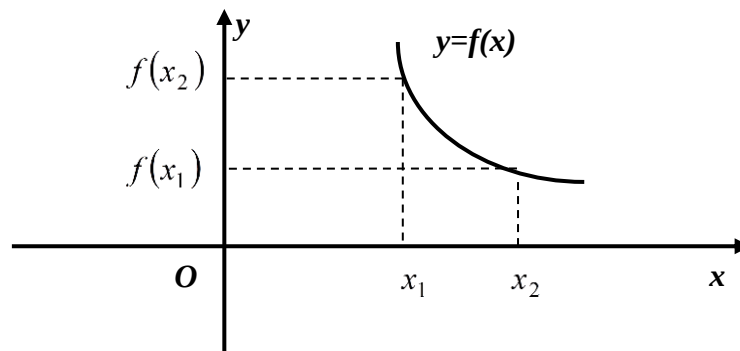


Рисунок 7

Замечание 1. Если функция возрастает или убывает на всем промежутке X , то она называется *монотонной (строго монотонной)* на промежутке X .

1.2. Виды функций

Рассмотрим некоторые функции.

1. Постоянная функция.

Постоянной называется функция, заданная формулой $y = b$, где b – некоторое число.

Графиком постоянной функции $y = b$ является прямая, параллельная оси абсцисс Ox (рис 8).

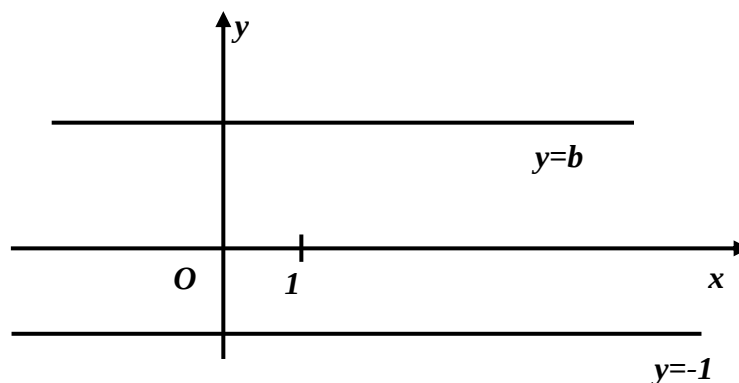


Рисунок 8

2. Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y = kx$, где $k \neq 0$. Число $k \neq 0$ называется **коэффициентом пропорциональности**.

Область определения функции – множество все действительных чисел, т.е. $D_f = (-\infty; +\infty)$.

При $k > 0$ функция **возрастает**, а при $k < 0$ функция **убывает** на всей числовой прямой.

Например, построим график функции $y = -2x$. График функции $y = -2x$ является прямой линией. Для построения прямой достаточно выбрать две точки: при $x = 0 \Rightarrow y = -2 \cdot 0 = 0$; при $x = -1 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) = 2$. Заносим полученные значения в таблицу

x	0	-1
y	0	2

и строим график функции (рис. 9).

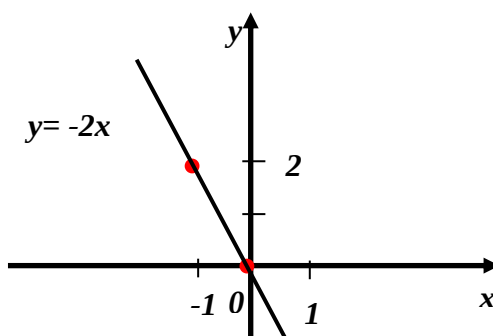


Рисунок 9

3. Линейная функция.

Линейной называется такая функция, которая задана формулой, где $y = kx + b$ k и b – действительные числа. Если, в частности, $k = 0$, то получаем постоянную функцию $y = b$; если $b = 0$, то получаем прямую пропорциональность $y = kx$.

Область определения функции при $k \neq 0$ и $b \neq 0$ – множество все действительных чисел, т.е. $D_f = (-\infty; +\infty)$.

При $k > 0$ функция **возрастает**, а при $k < 0$ функция **убывает** на всей числовой прямой.

Например, построим график функции $y = 3x - 1$. График функции $y = 3x - 1$ является прямой линией. Для построения прямой достаточно выбрать две точки: при $x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; при $x = 1 \Rightarrow y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Заносим полученные значения в таблицу

x	0	1
y	-1	2

и строим график функции (рис. 10).

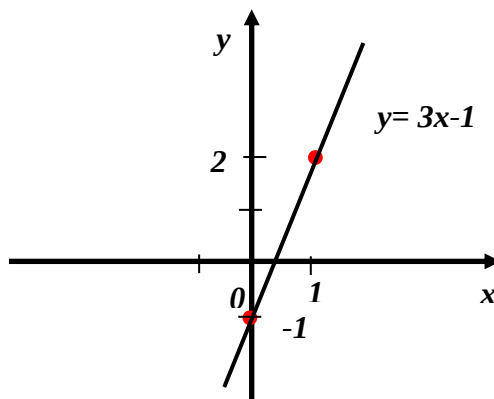


Рисунок 10

4. Функция $y = x^2$.

Область определения функции – вся числовая ось, т.е. $D_f = (-\infty; +\infty)$.

На промежутке $[0; +\infty)$ функция **возрастает**. **На промежутке** $(-\infty; 0]$ функция **убывает**.

Графиком функции $y = x^2$ является **парабола**.

Пример 3. Построить график функции $y = x^2$.

Решение.

Для построения выбираем значения x из области определения и находим соответствующие значения функции:

$$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 = 4,$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1,$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0,$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1,$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4.$$

Заносим полученные значения в таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

и строим график функции (рис. 11).

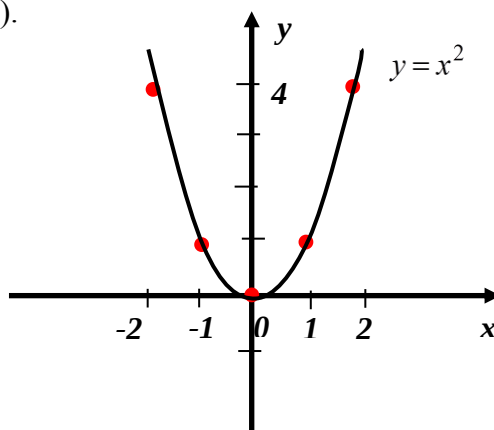


Рисунок 11

5. Показательная функция

Показательная функция задается формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Перечислим некоторые свойства функции $y = a^x$ **при** $a > 1$:

1) **область определения функции** – вся числовая ось $D_f = (-\infty; +\infty)$;

2) **область значения функции** – промежуток $(0; +\infty)$, т.е. $E_f = (-\infty; +\infty)$;

3) функция **возрастает** на всей числовой прямой.

Пример 3. Построить график функции $y = 2^x$.

Решение.

Для построения выбираем значения x из области определения и находим соответствующие значения функции:

$$x = -2 \Rightarrow y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25,$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2^0 = 1,$$

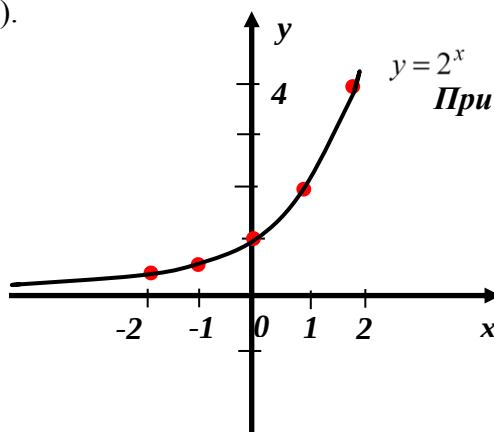
$$x = 1 \Rightarrow y = 2^1 = 2,$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4.$$

Заносим полученные значения в таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	0,25	0,5	1	2	4

и строим график функции (рис. 12).



При $a > 1$ функция возрастает

Рисунок 12

Перечислим некоторые свойства функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$:

1) **область определения функции** – вся числовая ось $D_f = (-\infty; +\infty)$;

2) **область значения функции** – промежуток $(0; +\infty)$, т.е. $E_f = (0; +\infty)$;

3) функция **убывает** на всей числовой прямой.

Пример 3. Построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Решение.

Для построения выбираем значения x из области определения и находим соответствующие значения функции:

$$x = -2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4,$$

$$x = -1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2,$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$$

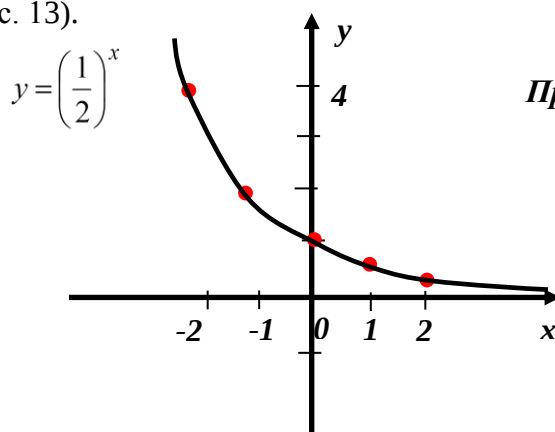
$$x = 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Заносим полученные значения в таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	0,5	0,25

и строим график функции (рис. 13).



При $0 < a < 1$ функция убывает

Рисунок 13

Задания для самостоятельного решения

1. Построить график функции $y = x^3$ и перечислить ее свойства.
2. Построить график функции $y = \sqrt{x}$ и перечислить ее свойства.
3. Построить график функции $y = \frac{1}{x}$ и перечислить ее свойства.