ГЛАВА 5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 2. Применение производной к исследованию функции на монотонность. Применение производной к исследованию функции на экстремум

2.1. Монотонные функции. Признак монотонности функции

Пусть дана функция $y = f(x)$.

<u>Определение 1.</u> Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (рисунок 1).

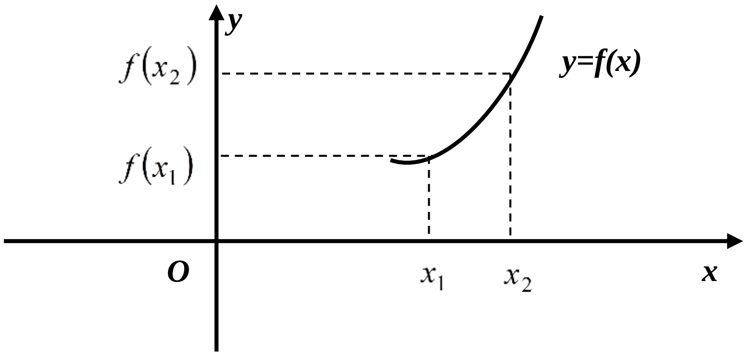

Рисунок 1

<u>Определение 2.</u> Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (рисунок 2).

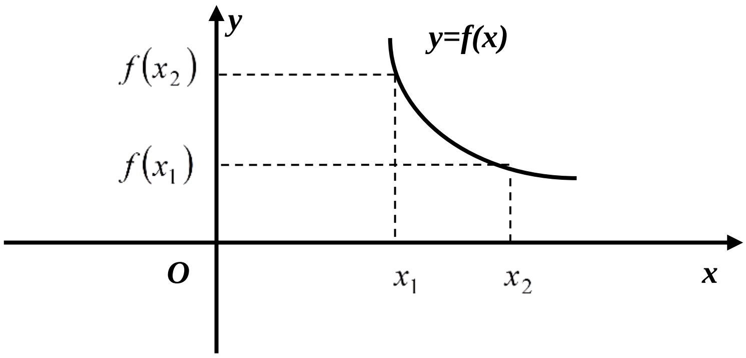

Рисунок 2

Замечание 1. Если функция возрастает или убывает на всем промежутке X, то она называется ***монотонной*** (***строго монотонной***) на промежутке X.

Замечание 2. В определении возрастающей и убывающей функций знаки неравенства между значениями функции могут быть нестрогими. При этом:

1) если при $x_1 < x_2$ справедливо $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется ***неубывающей***;

2) если при $x_1 < x_2$ справедливо $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется ***невозрастающей***.

Пусть дана функция $y = f(x)$.

<u>Теорема 2.1</u> (***необходимое*** условие ***монотонности*** функции). Если дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \ge 0$ для любых $x \in [a,b]$.

<u>Теорема 2.2</u> (достаточное условие ***монотонности*** функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), причем $f'(x) > 0$ для любых $x \in [a,b]$, то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$.

Таким образом, учитывая достаточное условие монотонности функции, для нахождения участков монотонности функции, достаточно решить неравенство $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$. Все интервалы, входящие в решение данных неравенств, будут являться промежутками возрастания или убывания функции.

Пример 1. Определить промежутки, на которых функция $f(x)=x^3-12x+11$ возрастает и убывает.

Решение.

1. Найдем ***область определения*** данной функции:

$$f(x)=x^3-12x+11 - \textit{целая рациональная функция} \Rightarrow D_f=R.$$

2. Найдем ***производную*** функции:

$$f'(x)=\left(x^3-12x+11\right)'=3x^2-12.$$

3. Учитывая достаточное условие монотонности функции (***теорема 2.2***), решим ***неравенства*** $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$:

$$3x^2-12>0 \Rightarrow 3\left(x^2-4\right)>0 \text{ или } x^2-4>0.$$

1) Найдем ***значения переменной*** x, в которых первая производная обращается в нуль:

$$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=-2.$$

3) Найдем ***знаки производной*** функции $f'(x)$ на каждом из интервалов:

$$f'(-3)=3\cdot(-3)^2-12=15>0(+),$$

$$f'(0)=3\cdot(0)^2-12=-12<0(-),$$

$$f'(3)=3\cdot(3)^2-12=15>0(+).$$

Таким образом, из неравенства $f'(x)>0$ следует, что функция $f(x)=x^3-12x+11$ ***возрастает*** на ***интервале*** $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, а из неравенства $f'(x)<0$ следует, что данная функция ***убывает*** на ***интервале*** $(-2,2)$.

На рисунке 3 промежутки ***возрастания*** обозначены ***стрелкой вверх,*** а промежуток ***убывания*** – ***стрелкой вниз***.

2.2. Локальные экстремумы функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке $[a,b]$.

Определение 3. Точка $x_0\in(a,b)$ называется точкой ***строгого локального максимума*** функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0 , т.е. $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, выполняется неравенство $f(x_0)>f(x)$ (рисунок 4).

Обозначение: Точка x_0 – ***max***

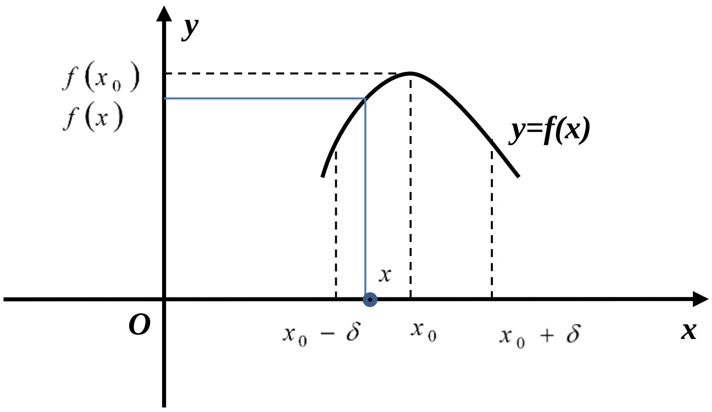

Рисунок 4

<u>Определение 4.</u> Точка $x_0 \in (a,b)$ называется точкой ***строгого локального минимума*** функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0 , т.е. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$ (рисунок 5).

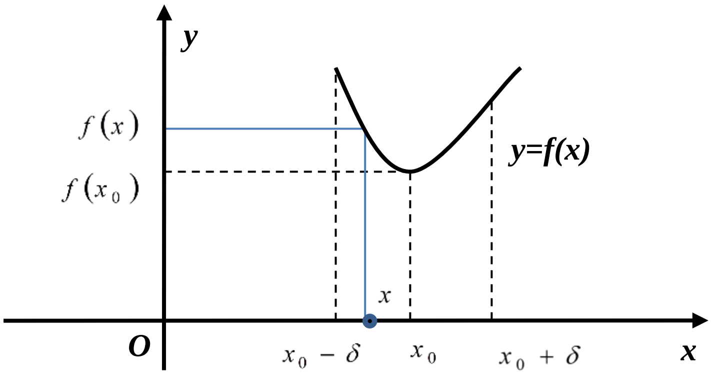

Рисунок 5

Обозначение: Точка x_0 – ***min***

Замечание 3. Точки ***локального максимума*** и ***локального минимума*** функции объединяются общим названием ***локальный экстремум***.

<u>Теорема 2.3.</u> (***необходимое условие существования локального экстремума***). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Замечание 4. Условие равенства нулю производной является необходимым, но не достаточным. Примером этому может служить функция $y = x^3$. Ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю в точке $x_0 = 0$. Однако функция всюду возрастает (рисунок 6) и не имеет экстремумов.

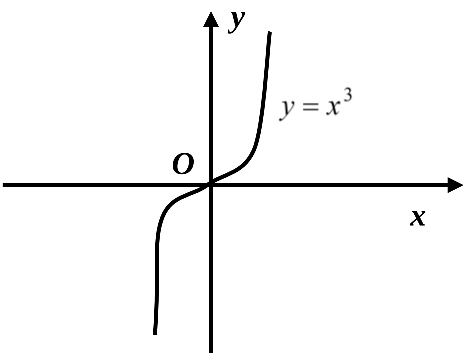

Рисунок 6

Для исследования на экстремум более важным является следствие из необходимого условия (***теорема 2.3***).

Следствие 1. Если производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 отлична от нуля, то в точке x_0 у этой функции нет экстремума.

<u>Определение 5.</u> Точки, в которых производная заданной функции равна нулю, называются ***стационарными точками***.

<u>Теорема 2.4</u> (***достаточное условие существования локального экстремума***). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a,b), содержащем точку критическую точку x_0, дифференцируема во всех точка этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0) и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум. При этом:

- если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с ***«плюса»*** на ***«минус»***, то этот экстремум – ***максимум*** (***max***) (рисунок 7);
- если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с ***«минуса»*** на ***«плюс»***, то этот экстремум – ***минимум*** (*min*) (рисунок 8).

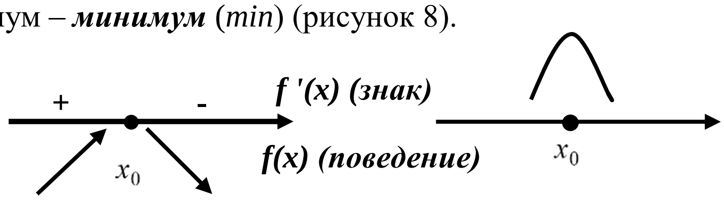

Рисунок 7

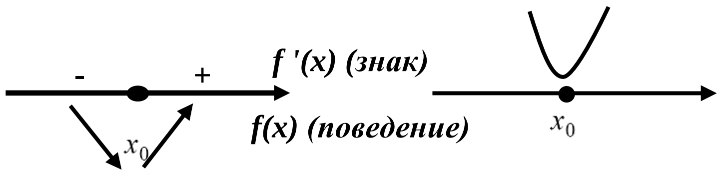

Рисунок 8

Учитывая теорему о достаточном условии существования экстремума, можно определить точки экстремума как точки, в которых меняется характер монотонности функции.

Чтобы исследовать функцию на экстремум, необходимо:

- вычислить ***производную заданной*** функции;
- найти все ***критические точки***;
- ***нанести*** эти ***точки*** на ***числовую ось***;
- определить ***знак производной*** на каждом из ***полученных интервалов***;
- по ***знаку производной*** определить ***характер монотонности*** функции;
- определить наличие ***экстремума*** и его характер в каждой ***критической точке***, исключая ***точки разрыва*** функции.

Пример 2. Исследовать функцию $y=x^2+3$ на экстремум.

Решение.

1. Найдем ***область определения*** функции:

$$D_f=R$$

2. Найдем ***производную*** заданной функции:

$$y'=\left(x^2+3\right)'=\left(x^2\right)'+(3)'=2x$$

3. Найдем ***стационарные точки***. Для этого полученную производную приравняем к нулю и решим соответствующее уравнение $(y'=0)$:

$$2x=0\Rightarrow x=0.$$

Стационарная точка $x = 0$.

4. Отметим ***полученную точку*** на числовой оси (рисунок 9):

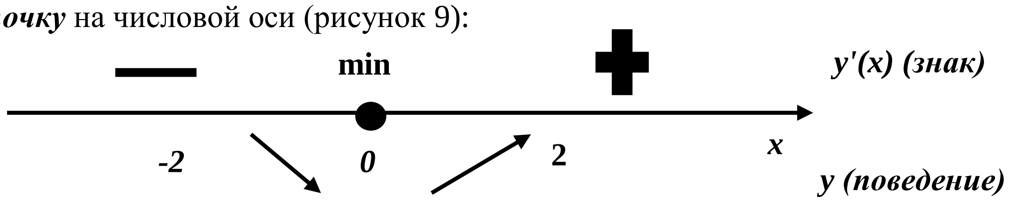

Рисунок 9

5. Определим ***знак производной*** на каждом из полученных интервалов:

$$y'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0(-);$$

$$y'(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0(+).$$

6. Из рисунка 9 понятно, что функция имеет ***минимум*** в точке $x = 0$. Значение функции в точке $x = 0$ будет равно:

$$y_{\min} = 0^2 + 3 = 3.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать функцию на экстремум $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$.

Ответ: Точка $x = 2$ – точка ***максимума***, точка $x = 3$ – точка ***минимума***.