ГЛАВА 4. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАНЕНИЙ. НЕРАВЕНТСТВА

§ 1. Уравнения. Системы уравнений

1.1. Основные определения

<u>Определение 1.</u> Равенство с переменной $f(x)=g(x)$ называется ***уравнением с одной переменной*** x.

<u>Определение 2.</u> Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называется ***корнем уравнения***.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Например:

1) уравнение $2x+5=10$ имеет ***единственный корень*** $x=2{,}5$, так как только при этом значении переменой $2x+5=10$ обращается в верное равенство $(2\cdot 2{,}5+5\equiv 10)$;

2) уравнение $(3-x)(x+1)=0$ имеет ***два корня***: 3 и -1;

3) уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных корней.

<u>Определение 3.</u> ***Уравнения***, имеющие одни и те же корни, называются ***равносильными***.

Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, уравнения $2x+5=10$ и $2x-5=0$ ***равносильны***, так как каждое из них имеет единственный корень – число 2,5.

Равносильны уравнения $x^2+1=0$ и $2x^2+10=0$ – ни одно из них не имеет корней.

Уравнения $x-6=0$ и $x^2=36$ ***неравносильны***, так как первое уравнение имеет один корень $x=6$, а второе имеет два корня: 6 и -6.

В процессе решение уравнения его стараются заменить более простым, но равносильным данному.

Преобразования, которые приводят к равносильным уравнениям

1. Если в уравнении поменять местами левую и правую части, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному.

3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.

4. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.

Например:

1) уравнение $x^2=36$ равносильно уравнению $x^2-36=0$;

2) уравнение $2x=6$ равносильно уравнению $x=3$ (обе части уравнения мы умножили на $\frac{1}{2}$).

1.2. Линейные уравнения

<u>Определение 3.</u> Уравнение вида

$$ax+b=0\,(a\neq 0),$$

где a и b действительные числа, называется ***линейным уравнением***.

Многие уравнения в результате преобразований сводятся к линейным.

Пример 1. Решить уравнение: а) $x+4=2x+9$; б) $\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}=\frac{5x}{12}-1$

Решение.

а)

$$x+4=2x+9$$
$$x-2x=-4+9$$
$$-x=5/(-1)\left\{разделим обе части уравнения на -1\right\}$$
$$x=-5$$

Проверка: $\begin{array}{c}-5+4=2\cdot(-5)+9\\ -1=-1\end{array}$

б)

$$\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}=\frac{5x}{12}-1$$
$$\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}-\frac{5x}{12}=-1$$

Приведем в левой части уравнения к общему знаменателю – это НОК (3,4,6,12)=12:

$$\frac{^{4/}2}{3}+\frac{^{3/}x}{4}+\frac{^{2/}1-x}{6}-\frac{^{1/}5x}{12}=-1$$
$$\frac{4\cdot2+3\cdot x+2\cdot(1-x)-1\cdot5x}{12}=-1$$
$$\frac{8+3x+2-2x-5x}{12}=-1$$
$$\frac{10-4x}{12}=-1$$

Домножим обе части уравнения на 12:

$$12\cdot\frac{10-4x}{12}=-1\cdot12$$
$$10-4x=-12$$
$$-4x=-12-10$$
$$-4x=-22$$

Разделим обе части уравнения на (-4) и получим:

$$x=5{,}5$$

Проверку предлагаем читателю выполнить самостоятельно.

Ответ: а)-5; б) 5,5.

1.3. Квадратные уравнения

Определение 4. Уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0$$

где a,b,c – действительные числа, причем $a\neq0$, называется ***квадратным уравнением***.

Если $a=1$, то квадратное уравнение называют ***приведенным***; если $a\neq1$, – то ***неприведенным***.

Числа a,b,c носят называние:

a – ***первый коэффициент***, b – ***второй коэффициент***; c – ***свободный член***.

Корни уравнения находят в соответствии с ***алгоритмом***:

1. Находим ***дискриминант квадратного уравнения***: $D=b^2-4ac$.

2. Если $D>0$, ***то уравнение имеет два действительных корня***, которые находят по формуле:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\ \text{или}\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D=0$, ***то уравнение имеет один действительный корень***, кратности два, который находят по формуле

$$x_1 = x_2 = x = \frac{-b}{2a}.$$

Если $D < 0$ ***, то уравнение не имеет действительных корней.***

Пример 2. Решить уравнение: а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 - 6x + 9 = 0$; в) $2x^2 - 3x + 5 = 0$. ***В первом уравнении в ответ записать сумму корней уравнения.***

Решение.

а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Здесь $a = 2, b = -5, c = 2$.

1. Вычисляем D:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9.$$

2. Так как $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня, которые находим по формуле:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5+3}{4} = 2,\ x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Таким образом, $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$ – ***корни*** заданного уравнения.

Найдем сумму корней данного уравнения: $x_1 + x_2 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$. Следовательно, в ответ запишем 2,5.

б) $x^2 - 6x + 9 = 0$. Здесь $a = 1, b = -6, c = 9$.

1. Вычисляем D:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

2. Так как $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень, кратности два:

$$x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Таким образом, $x = 3$ – ***корень*** заданного уравнения.

в) $2x^2 - 3x + 5 = 0$. Здесь $a = 2, b = -3, c = 5$.

1. Вычисляем D:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31.$$

2. Так как $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

На втором занятии, в **главе 2 § 1**, мы рассмотрели ***основные способы разложения многочлена на множители***, к которым относятся:

1. Вынесение общего множителя за скобку.

2. Использование формул сокращенного умножения.

3. Способ группировки.

Добавим еще один способ разложения многочлена на множители. Он применим к ***квадратному трехчлену*** $ax^2 + bx + c$, если известны его корни x_1 и x_2.

4. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пример 3. Разложить квадратный трёхчлен на множители: а) $x^2 - 3x - 4$; б) $2x^2 - 5x + 2$; в) $x^2 - 6x + 9$.

Решение.

а) $x^2 - 3x - 4$. Приравняем нулю данный квадратный трехчлен

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

и найдем его корни. Здесь $a = 1, b = -3, c = -4$.

1. Вычисляем D:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25.$$

2. Так как $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня, которые находим по формуле:

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3+5}{2} = 4\,,\; x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3-5}{2 \cdot 1} = -1.$$

3. Поскольку $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, то получаем

$$x^2 - 3x - 4 = 1(x-4)(x-(-1)) \text{ или } x^2 - 3x - 4 = 1(x-4)(x+1).$$

б) $2x^2 - 5x + 2$. Приравняем нулю данный квадратный трехчлен

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

и найдем его корни. Здесь $a = 1, b = -3, c = -4$.

Корни уравнения были найдены в примере 2 под буквой а): $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$.

Таким образом, получаем

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)(x-0{,}5).$$

в) $x^2 - 6x + 9$. Представим данный квадратный трехчлен в виде:

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2.$$

Воспользуемся формулой $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ и получим

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x-3)^2.$$

Неполные квадратные уравнения

<u>Определение 5.</u> Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называется ***неполным***.

Пример 4. Решить уравнение: а) $2x^2 - 9x = 0$; б) $4x^2 - 1 = 0$.

Решение.

а) $2x^2 - 9x = 0$ – неполное квадратное уравнение, здесь $c = 0$. Для отыскания корней данного уравнения можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения. Вынесем общий множитель x за скобки:

$$2x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(2x-9) = 0.$$

Значит, либо $x = 0$, либо $2x - 9 = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2x - 9 = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 4{,}5. \end{array}\right.$$

б) $4x^2 - 1 = 0$ – неполное квадратное уравнение, здесь $b = 0$. Решим данное уравнение не пользуясь формулой корней квадратного уравнения:

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1$$

$$4x^2 = 1 / : 4$$

$$x^2 = 0{,}25$$

$$x_1 = +\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

$$x_2 = -\sqrt{0{,}25} = -0{,}5.$$

1.4. Уравнения с одной переменной в знаменателе

Решение уравнения вида $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ основано на утверждении: дробь $\dfrac{m}{n} = 0$ тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель дроби отличен от нуля (на 0 делить нельзя):

$$\begin{cases} m = 0, \\ n \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} p(x) = 0, \\ q(x) \neq 0. \end{cases}$

Условие $q(x) \neq 0$ является условием для нахождения ***области допустимых значений*** данного уравнения.

<u>Определение 6.</u> Областью допустимых значений (ОДЗ) или ***областью определения уравнения*** $f(x) = g(x)$ называется множество всех тех значений переменной x, при которых и выражение $f(x)$ и выражение $g(x)$ имеют смысл.

<u>Определение 7.</u> Уравнение $f(x) = g(x)$ называется рациональным, если функции $f(x)$ и $g(x)$ – ***рациональные выражения.***

Пример 5. Решить уравнение: а) $\dfrac{11 - x}{x + 2} = 0$; б) $\dfrac{x + 2}{4 - x} = 5$.

Решение.

а) $\dfrac{11 - x}{x + 2} = 0$.

1. Найдем ***ОДЗ*** из условия $x + 2 \neq 0$. Следовательно, $x \neq -2$.

2. Корни уравнения будем искать из условия $11 - x = 0$:

$$\begin{matrix} 11 - x = 0 \\ 11 = x \end{matrix} \quad \text{или } x = 11.$$

Учитывая ***ОДЗ***, $x = 11$ является корнем уравнения.

б) $\dfrac{x + 2}{4 - x} = 5$.

1. Найдем ***ОДЗ*** из условия $4 - x \neq 0$:

$$\begin{matrix} -x \neq -4 \,/ : (-1) \\ x \neq 4 \end{matrix}.$$

2. Решим данное уравнение. Для этого обе части уравнения домножим на выражение $(4 - x)$:

$$(4 - x) \cdot \frac{x + 2}{4 - x} = 5 \cdot (4 - x)$$
$$x + 2 = 20 - 5x$$
$$x + 5x = 20 + 2$$
$$6x = 22 \,/ : 6$$
$$x = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

Учитывая ***ОДЗ***, $x = \dfrac{11}{3}$ является корнем уравнения.

1.5. Иррациональные уравнения

<u>Определение 8.</u> Иррациональным уравнением называется уравнение, в котором переменная находится под знаком ***радикала (корня)*** или под знаком ***возведения в дробную степень***.

Основной метод решения иррациональных уравнений – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Пример 6. Решить уравнение: а) $\sqrt{x - 3} = 2$; б) $\sqrt[3]{x - 3} = 2$; в) $\sqrt{\dfrac{1}{2x - 5}} = 2$.

Решение.

а) $\sqrt{x - 3} = 2$.

1. Так как арифметический квадратный корень из числа $a\left(\sqrt{a}\right)$ определен только для $a \geq 0$, то ***ОДЗ*** найдем из условия $x-3 \geq 0$.

Решая данное неравенство, получаем: $x \geq 3$, т.е. $x \in [3,+\infty)$.

2. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x-3=4$$
$$x=4+3$$
$$x=7.$$

Поскольку $x=7 \in [3,+\infty)$, то $x=7$ является корнем уравнения.

б) $\sqrt[3]{x-3}=2$.

1. Поскольку корень нечетной степени можно извлечь из любого действительного числа, то ***ОДЗ*** для данного уравнения будет множество всех действительных чисел.

$$-x \neq -4 / : (-1)$$
$$x \neq 4.$$

2. Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow x-3=8$$
$$x=8+3$$
$$x=11.$$

Таким образом, $x=7$ – корень уравнения.

в) $\sqrt{\dfrac{1}{2x-5}}=2$.

1. Для такого уравнения нахождение ***ОДЗ*** приведет к довольно громоздким преобразованиям. В таких случаях решают уравнение и делают проверку, так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень может привести к появлению посторонних корней.

2. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2x-5}}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{1}{2x-5}=4 / \cdot (2x-5)$$
$$(2x-5)\cdot\frac{1}{2x-5}=4\cdot(2x-5)$$
$$1=8x-20$$
$$1+20=8x$$
$$x=2{,}625$$

3. Проверка.

При $x=2{,}625$ получаем:

$$\sqrt{\frac{1}{2\cdot 2{,}625-5}}=2$$
$$\sqrt{\frac{1}{0{,}25}}=2$$
$$\sqrt{4}=2$$

Таким образом, $x=2{,}625$ – корень уравнения.

1.6. Показательные уравнения

Показательное уравнение вида

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},$$

где $a>0, a\neq 1$, равносильно $f(x)=g(x)$.

Пример 7. Решить уравнение: а) $3^{x-3}=27$; б) $2^{x+5}=\dfrac{1}{8}$; в) $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{2x-3}=6$.

Решение.

а) $3^{x-3}=27$. Приведем данное уравнение к виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, для этого представим 27 как 3^3:

$$3^{x-3}=3^3.$$

Это уравнение равносильно уравнению $x-3=3$. Следовательно, $x=6$.

б). Приведем все степени к одному основанию 2: $\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2^3}=2^{-3}$, т.е.

$$2^{x+5}=2^{-3}.$$

Это уравнение равносильно уравнению $x+5=-3$. Следовательно, $x=-3-5\Rightarrow x=-8$.

в) $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{2x-3}=6$. Представим 36 в виде степени с основанием 6: $\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{6^2}=6^{-2}$.

$$\left(6^{-2}\right)^{2x-3}=6$$
$$6^{-2\cdot(2x-3)}=6^1.$$

Это уравнение равносильно уравнению $-2\cdot(2x-3)=1$. Решая его:

$$-2\cdot 2x+6=1$$
$$-4x=-5\,/:(-4)$$
$$x=1{,}25.$$

Таким образом, $x=1{,}25$ – корень уравнения.

1.7. Логарифмические уравнения

Простейшие логарифмические уравнения имеют вид:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x),\text{ где } a>0,\, a\neq 1.$$

Чтобы решить уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$***, необходимо***:

1. Найти ***ОДЗ*** – все значения переменной x, которые удовлетворяют неравенствам $f(x)>0$ и $g(x)>0$. Записывают это с помощью системы неравенств:

$$\begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)>0.\end{cases}$$

2. Решить уравнение $f(x)=g(x)$.

Пример 8. Решить уравнение: а) $\log_4(x+7)=2$; б) $\log_7(3x-8)-\log_7 11=\log_7 2$.

Решение.

а) $\log_4(x+7)=2$.

1. Так как логарифмическая функция $\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$ определена только для $x>0$, то ***ОДЗ*** найдем из условия $x+7>0$. Решая данное неравенство, получаем: $x>-7$, т.е. $x\in(7,+\infty)$.

2. Используя свойство логарифмов

$$\log_a x^n=n\log_a x$$

и равенство $\log_a a=1$, представим число 2 в правой части уравнения в виде:

$$2=2\cdot 1=2\log_4 4=\log_4 4^2=\log_4 16.$$

Следовательно, уравнение $\log_4(x+7)=2$ примет вид

$$\log_4(x+7)=\log_4 16.$$

Перейдем от этого уравнения к уравнению

$$x+7=16$$

Следовательно,

$$x = 16 - 7$$
$$x = 9.$$

Поскольку $9 \in (7, +\infty)$, $x = 9$ – корень уравнения.

б) $\log_7(3x - 8) - \log_7 11 = \log_7 2$.

1. ОДЗ находим из условия $3x - 8 > 0$. Решая данное неравенство:

$$3x > 8 \,/ : 3$$
$$x > \frac{8}{3}\left(2\frac{2}{3}\right)$$

получаем, что $x \in \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$.

2. Используя свойство логарифмов

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x > 0, y > 0,$$

преобразуем уравнение $\log_7(3x - 8) - \log_7 11 = \log_7 2$ к виду:

$$\log_7 \frac{3x - 8}{11} = \log_7 2$$

и далее

$$\frac{3x - 8}{11} = 2.$$

Решая последнее уравнение, находим:

$$\frac{3x - 8}{11} = 2 \,/ \cdot 11$$
$$3x - 8 = 22$$
$$3x = 30$$
$$x = 10.$$

Так как $10 \in \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$, $x = 10$ – корень уравнения.

1.8 Системы уравнений

Пусть даны ***два уравнения с двумя переменными*** $f(x; y) = 0$ и $g(x; y) = 0$.

Если ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то говорят, что надо решить ***систему уравнений***.

Определение 9. Каждая пара значений переменных $(x; y)$, обращающих в верное равенство каждое уравнение системы, называется ***решением системы уравнений***.

Уравнения, ***образующие систему***, объединяют фигурной скобкой:

$$\begin{cases} f(x; y) = 0, \\ g(x; y) = 0. \end{cases}$$

Решить систему – значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Определение 10. Две системы называются ***равносильными***, если эти системы имеют одни и те же решения.

Если каждое уравнение системы заменить ***равносильным уравнением***, то получится система, ***равносильная данной***.

Основной метод решения систем двух уравнений с двумя переменными – это ***метод подстановки***, который заключается в следующем:

1) одно уравнение системы преобразуется к виду, в котором y выражено через x (или x через y);

2) полученное выражение подставляют вместо y (или вместо x) во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной;

3) находят корни этого уравнения;

4) воспользовавшись выражением y через x (или x через y), находят соответствующее значение x (или y).

Пример 9. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2. \end{cases}$

Решение.

1) из первого уравнения системы $x-3y=10$ выразим x через y:

$$x=10+3y;$$

2) подставим полученное выражение $10+3y$ вместо x во второе уравнение системы. Получим:

$$3\cdot(10+3y)-2y=2.$$

3) решим полученное уравнение:

$$\begin{aligned} &3\cdot(10+3y)-2y=2 \\ &30+9y-2y=2 \\ &7y=2-30 \\ &7y=-28 / :(-7) \\ &\quad y=-4; \end{aligned}$$

4) соответствующие значения x найдем из уравнения $x=10+3y$. Если $y=-4$, то

$$x=10+3\cdot(-4)=10-12=-2.$$

Таким образом, система имеет решение: $(-2;-4)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение: 1) $\frac{6}{x+9}=-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{x-14}{x-12}=\frac{7}{8}$; 3) $x^2-8x+15=0$ (в ответ записать сумму корней); 4) $-2x^2+5x+1=-x^2+4x+(3-x)^2$ (в ответ записать наименьший из корней); 5) $x^2-15=0$; 6) $x^2-16x=0$; 7) $\sqrt{x+9}=5$; 8) $\sqrt{\frac{4}{1-2x}}=5$; 9) $\log_{25}(2-3x)=\frac{1}{2}$; 10) $8^{7-x}=64$; 11) $\log_{\frac{1}{7}}(2x+5)-\log_{\frac{1}{7}}6=\log_{\frac{1}{7}}2$.

2. Решить систему уравнений: 1) $\begin{cases} 3x-y=10, \\ x+2y=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=12, \\ 3x-4y=-5. \end{cases}$

Ответы: ***1.*** 1) -18; 2) 28; 3) 8; 4) 1,5; 5) $\sqrt{15};-\sqrt{15}$; 6) $0;16$; 7) 16; 8) 0,42; 9) 1; 10)5; 11) 3,5.

2. 1) $(4;2)$; 2) $(1;2)$.