

ГЛАВА 4. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. НЕРАВЕНСТВА

§ 2. Неравенства

2.1. Основные определения

Пусть дано неравенство с одной переменной $f(x) > g(x)$ (вместо знака « $>$ » могут быть знаки « $<$ », « $\geq$ », « $\leq$ »).

Определение 1. Всякое значение переменной, при котором данное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство, называется **решением неравенства**.

Решить неравенство с переменной – значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение 2. Два неравенства с одной переменной называются **равносильными**, если решения этих неравенств **совпадают**; в частности, неравенства **равносильны**, если **оба не имеют решений**.

При решении неравенств обычно заменяют данное неравенство более простым, но равносильным данному.

Преобразования, которые приводят к равносильным неравенствам

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

2.2. Линейные неравенства

Определение 2. **Линейным** называется неравенство вида $ax > b$ (или соответственно $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$).

Пример 1. Решить неравенство: а) $2x - 1 > 3$; б) $2(x - 3) + 5(1 - x) \geq 3(2x - 1)$.

Решение.

а) $2x - 1 > 3$. Используя преобразования, которые приводят к равносильным неравенствам, получим:

$$2x > 3 + 1$$

$$2x > 4 : 2$$

$$x > 2.$$

С помощью координатной прямой (рис. 1) находим, что множество решений неравенства есть интервал $(2; +\infty)$;

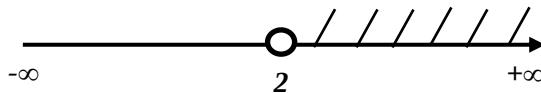


Рисунок 1

б) $2(x - 3) + 5(1 - x) \geq 3(2x - 1)$. Раскрыв скобки, получим:

$$2x - 6 + 5 - 5x \geq 6x - 3$$

$$-3x - 1 \geq 6x - 15$$

Перенесем слагаемые с переменной x в левую часть неравенства, а свободные члены в правую (1):

$$-3x - 6x \geq -15 + 1$$

$$-9x \geq -14.$$

Разделим обе части неравенства на отрицательное число -9 и изменим знак неравенства, получим неравенство, равносильное данному:

$$-9x \geq -14 / : (-9)$$

$$x \leq \frac{14}{9}.$$

С помощью координатной прямой (рис. 2) находим, что множество решений неравенства есть интервал $\left(-\infty; \frac{14}{9}\right]$.

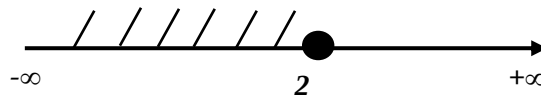


Рисунок 2

2.3. Системы неравенств

Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств.

Определение 3. Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется **решением системы неравенств**.

Пример 2. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \leq 11. \end{cases}$$

Решение.

Первое неравенство системы $2x - 1 > 3$ преобразуется в равносильно ему неравенство $x > 2$:

$$2x - 1 > 3$$

$$2x > 3 + 1$$

$$2x > 4 / : 2$$

$$x > 2,$$

а второе – в неравенство $x \leq \frac{13}{3}$:

$$3x - 2 \leq 11$$

$$3x \leq 11 + 2$$

$$3x \leq 13 / : 3$$

$$x \leq \frac{13}{3}.$$

Таким образом, задача сводится к решению системы
$$\begin{cases} x > 2, \\ x \leq \frac{13}{3}. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 3) находим, что множество решений неравенства есть интервал $\left(2; \frac{13}{3}\right]$.

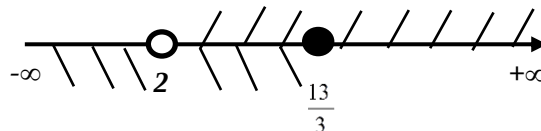


Рисунок 3

2.4. Рациональные неравенства

Решение рациональных неравенств вида $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ (или соответственно $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$,

$\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$) обычно решаются методом интервалов (методом промежутков). Суть этого метода рассмотрим на примерах.

Пример 3. Решить неравенство: а) $\frac{x-5}{3x-2} > 0$; б) $\frac{3x+7}{2x-7} \geq 5$.

Решение.

а) $\frac{x-5}{3x-2} > 0$. Рассмотрим функцию, стоящую в левой части неравенства $f(x) = \frac{x-5}{3x-2}$.

1. Найдем область определения функции из условия, что знаменатель дроби не равен нулю:

$$3x - 2 \neq 0$$

$$3x \neq 2 : 3$$

$$x \neq \frac{2}{3}.$$

Таким образом, область определения полученной функции – множество всех действительных чисел, кроме $x = \frac{2}{3}$. Исключим точку $x = \frac{2}{3}$ из области определения функции (рис. 4):

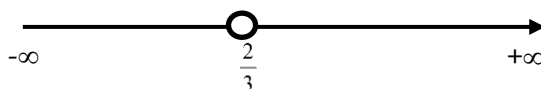


Рисунок 4

2. Найдем точки, в которых функция $f(x) = \frac{x-5}{3x-2}$ может принимать значения, равные нулю. Для этого

напомним, что $\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$. Значит, числитель дроби приравняем к нулю и решим уравнение

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5.$$

Полученное значение нанесем на числовую ось (рис. 5). Учтем, что исходное неравенство имеет строгий знак («>»). Следовательно, точку $x = 5$ изображаем пустой:

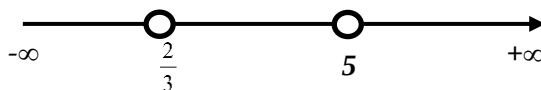


Рисунок 5

Таким образом, полученные точки $\frac{2}{3}$ и 5 разбивают числовую ось на три интервала:

$$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; 5\right) \text{ и } (5; +\infty).$$

3. Найдем знаки, которые может принимать функция $f(x) = \frac{x-5}{3x-2}$ в каждом из интервалов:

- из интервала $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ берем значение $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0-5}{3 \cdot 0 - 2} = \frac{5}{2} = 2,5$. Т.е., в интервале $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ функция $f(x) > 0$;

- из интервала $\left(\frac{2}{3}; 5\right)$ берем значение $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1-5}{3 \cdot 1 - 2} = -\frac{4}{13}$. Т.е., в интервале $\left(\frac{2}{3}; 5\right)$ функция $f(x) < 0$;

- из интервала $(5; +\infty)$ берем значение $x = 6 \Rightarrow f(6) = \frac{6-5}{3 \cdot 6 - 2} = \frac{1}{16}$. Т.е., в интервале $(5; +\infty)$ функция $f(x) > 0$. Наносим полученные знаки на числовую ось (рис.6):

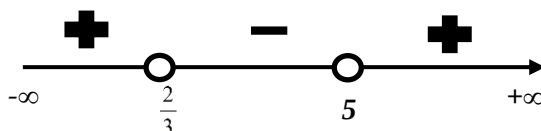


Рисунок 6

Так как функция $f(x) = \frac{x-5}{3x-2}$ положительна на интервалах $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ и $(5; +\infty)$, то решением исходного неравенства $\frac{x-5}{3x-2} > 0$ будут все значения переменной, принадлежащие этим промежуткам, т.е. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (5; +\infty)$.

б) $\frac{3x+7}{2x-7} \geq 5$.

1. Выполним преобразования в данном неравенстве:

$$\begin{aligned} \frac{3x+7}{2x-7} &\geq 5 \\ \frac{3x+7}{2x-7} - 5 &\geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{приведем к общему} \\ \text{знаменателю: } 2x-7 \end{array} \right\} \\ \frac{3x+7-5 \cdot (2x-7)}{2x-7} &\geq 0 \\ \frac{3x+7-5 \cdot 2x+5 \cdot 7}{2x-7} &\geq 0 \\ \frac{3x+7-10x+35}{2x-7} &\geq 0 \\ \frac{-7x+42}{2x-7} &\geq 0. \end{aligned}$$

В результате получили неравенство, равносильное исходному.

2. Рассмотрим функцию, стоящую в левой части неравенства $f(x) = \frac{42-7x}{2x-7}$. Найдем область определения функции из условия, что знаменатель дроби не равен нулю:

$$2x-7 \neq 0$$

$$2x \neq 7 : 2$$

$$x \neq \frac{7}{2}$$

$$x \neq 3,5$$

Таким образом, область определения полученной функции – множество всех действительных чисел, кроме $x = 3,5$. Исключим точку $x = 3,5$ из области определения функции (рис. 7):

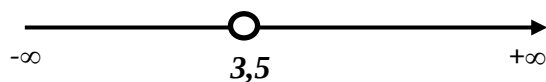


Рисунок 7

3. Найдем точки, в которых функция $f(x) = \frac{42-7x}{2x-7}$ может принимать значения, равные нулю. Для этого

напомним, что $\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$. Значит, числитель дроби приравняем к нулю и решим уравнение

$$42-7x=0$$

$$-7x=-42 : (-7)$$

$$x=6$$

Полученное значение нанесем на числовую ось (рис. 8). Учтем, что исходное неравенство имеет нестрогий знак (« $\geq$ »). Следовательно, точку $x = 6$ изображаем заштрихованной:

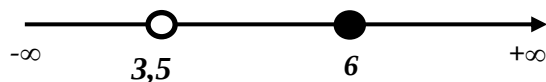


Рисунок 8

Таким образом, полученные точки 3,5 и 6 разбивают числовую ось на три интервала:

$$(-\infty; 3,5), (3,5; 6) \text{ и } (6; +\infty).$$

4. Найдем знаки, которые может принимать функция $f(x) = \frac{42-7x}{2x-7}$ в каждом из интервалов:

- из интервала $(-\infty; 3,5)$ берем значение $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{42-7 \cdot 0}{2 \cdot 0 - 7} = \frac{42}{-7} = -6$. Т.е., в интервале $(-\infty; 3,5)$ функция $f(x) < 0$;

- из интервала $(3,5; 6)$ берем значение $x = 5 \Rightarrow f(5) = \frac{42-7 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 7} = \frac{7}{3} = 3,5$. Т.е., в интервале $(3,5; 6)$ функция $f(x) > 0$;

- из интервала $(6; +\infty)$ берем значение $x = 7 \Rightarrow f(7) = \frac{42-7 \cdot 7}{2 \cdot 7 - 7} = \frac{-7}{7} = -1$. Т.е., в интервале $(6; +\infty)$ функция $f(x) < 0$. Наносим полученные знаки на числовую ось (рис. 9):

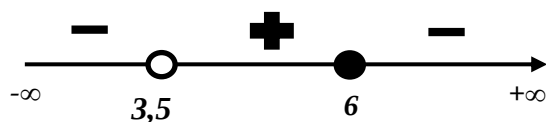


Рисунок 9

Так как функция $f(x) = \frac{42-7x}{2x-7}$ неотрицательна ($\geq$) на интервале $(3,5; 6]$, то решением исходного неравенства $\frac{42-7x}{2x-7} \geq 0$ будут все значения переменной, принадлежащие этому промежутку, т.е. $x \in (3,5; 6]$.

2.5. Неравенства второй степени

В данном случае речь идет о неравенствах вида:

$$ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c < 0 \text{ и } ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Наиболее удобный способ решения неравенства второй степени – **графический**.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с ветвями, направленными вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$. При этом возможны три случая расположения параболы:

- парабола пересекает ось Ox , если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня;

- парабола имеет вершину на оси Ox , если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один действительный корень;

- парабола не пересекает ось Ox , если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.

Опираясь на графические иллюстрации, можно решать квадратные неравенства.

Пример 4. Решить неравенство: а) $2x^2 + 5x + 2 > 0$; б) $7x + 10 \geq 3x^2$.

Решение.

а) $2x^2 + 5x + 2 > 0$.

1. Находим корни уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$:

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9,$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + 3}{4} = -0,5, x_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - 3}{2 \cdot 2} = -2.$$

2. Так как $a=2>0 \Rightarrow$ ветви параболы, изображающей график функции $y=2x^2+5x+2$, направлены вверх ($\uparrow$). Строим эскиз графика данной функции (рис. 10):

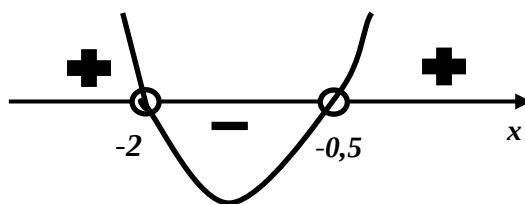


Рисунок 10

Учитывая, что неравенство строгое ($>$), точки $x_1 = -0,5$ и $x_2 = -2$ изображаем пустыми.

3. Неравенство $2x^2+5x+2>0$ выполняется при тех значениях x , при которых точки параболы лежат выше оси Ox (на графике эти промежутки отражены знаком «+»).

Таким образом, $x \in (-\infty; -2) \cup (-0,5; +\infty)$.

б) $7x+10 \geq 3x^2$. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} 7x+10 &\geq 3x^2 \\ 7x+10-3x^2 &\geq 0 \cdot (-1) \\ -7x-10+3x^2 &\leq 0 \\ 3x^2-7x-10 &\leq 0. \end{aligned}$$

1. Находим корни уравнения $3x^2-7x-10=0$:

$$\begin{aligned} D &= (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 49 + 120 = 169, \\ x_1 &= \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = \frac{7+13}{6} = \frac{10}{3}, \quad x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = \frac{7-13}{2 \cdot 3} = -1. \end{aligned}$$

2. Так как $a=3>0 \Rightarrow$ ветви параболы, изображающей график функции $y=3x^2-7x-10$, направлены вверх ($\uparrow$). Строим эскиз графика данной функции (рис. 11):

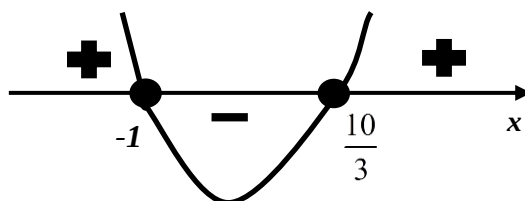


Рисунок 11

Учитывая, что неравенство нестрогое ($\leq$), точки $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{10}{3}$ изображаем заштрихованными.

3. Неравенство $3x^2-7x-10 \leq 0$ выполняется при тех значениях x , при которых точки параболы лежат ниже оси Ox (на графике эти промежутки отражены знаком «-»).

Таким образом, $x \in \left[-1; \frac{10}{3}\right]$.

2.6. Показательные неравенства

При решении **показательных неравенств** вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$) следует помнить, показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. глава 3, § 1). Значит,

если $a > 1$

из неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$) **следует переходить к неравенству** $f(x) > g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$),

из неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$) **следует переходить к неравенству** $f(x) < g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$);

если $0 < a < 1$

из неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$) **следует переходить к неравенству** $f(x) < g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$),

из неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$) **следует переходить к неравенству** $f(x) > g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$).

Пример 5. Решить неравенство: а) $2^x < \frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 1$.

Решение.

а) $2^x < \frac{1}{8}$. Приведем данное неравенство к виду $a^{f(x)} < a^{g(x)}$. Для этого $\frac{1}{8}$ представим как 2^{-3} :

$$2^x < 2^{-3}.$$

Здесь основание степени $a = 2 > 1$. Значит, от неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ следует переходить к неравенству $f(x) < g(x)$:

$$2^x < 2^{-3} \Rightarrow x < -3.$$

С помощью координатной прямой (рис. 12) находим, что множество решений неравенства есть интервал $(-\infty; -3)$.

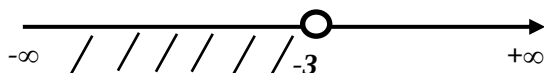


Рисунок 12

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 1$. Приведем данное неравенство к виду $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$. Для этого 1 представим как $\left(\frac{1}{3}\right)^0$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^0.$$

Здесь основание степени $a = \frac{1}{3} < 1$. Значит, от неравенства $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ следует переходить к неравенству $f(x) \leq g(x)$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow x \leq 0.$$

С помощью координатной прямой (рис. 13) находим, что множество решений неравенства есть интервал $(-\infty; 0]$.

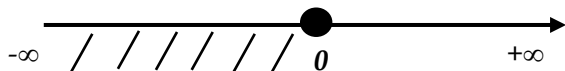


Рисунок 13

2.7. Логарифмические неравенства

При решении **логарифмических неравенств** вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) (\log_a f(x) < \log_a g(x), \log_a f(x) \geq \log_a g(x), \log_a f(x) \leq \log_a g(x))$$

следует помнить, логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. глава 3, § 2). Значит,

если $a > 1$

из неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ **следует переходить к неравенству** $f(x) > g(x)$,

из неравенства $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ **следует переходить к неравенству** $f(x) < g(x)$;

если $0 < a < 1$

из неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ **следует переходить к неравенству** $f(x) < g(x)$,

из неравенства $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ **следует переходить к неравенству** $f(x) > g(x)$.

При этом следует учитывать, что логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел. Значит, должны выполняться неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Пример 6. Решить неравенство: а) $\log_5(4x-7) < 1$; б) $\log_{0,2}(1-2x) > 2$.

Решение.

а) $\log_5(4x-7) < 1$. Приведем данное неравенство к виду $\log_a f(x) < \log_a g(x)$. Для этого воспользуемся равенством $\log_a a = 1$. Так как $1 = \log_5 5$, то

$$\log_5(4x-7) < \log_5 5.$$

Здесь основание степени $a = 5 > 1$. Значит, от неравенства $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ следует переходить к неравенству $f(x) < g(x)$:

$$\log_5(4x-7) < \log_5 5 \Rightarrow 4x-7 < 5.$$

Учитывая, что $f(x) > 0$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x-7 < 5, \\ 4x-7 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x < 5+7, \\ 4x > 0+7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x < 12 : 4, \\ 4x > 7 : 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 1,75. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 13) находим, что множество решений неравенства есть интервал $(1,75; 3)$.

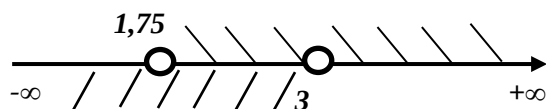


Рисунок 13

б) $\log_{0,2}(1-2x) > 2$. Приведем данное неравенство к виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Для этого воспользуемся свойством логарифмов $\log_a x^n = n \log_a x$ и равенством $\log_a a = 1$. Так как $1 = \log_{0,2} 0,2$ и $2 \log_{0,2} 0,2 = \log_{0,2} 0,2^2$, то

$$\log_{0,2}(1-2x) > 2 \Rightarrow \log_{0,2}(1-2x) > \log_{0,2} 0,2^2.$$

Здесь основание степени $a = 0,2 < 1$. Значит, от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ следует переходить к неравенству $f(x) < g(x)$:

$$\log_{0,2}(1-2x) > \log_{0,2} 0,2^2 \Rightarrow 1-2x < 0,2^2.$$

Учитывая, что $f(x) > 0$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-2x < 0,04, \\ 1-2x > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x < 0,04-1, \\ -2x > 0-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x < -0,96 : (-2), \\ -2x > -1 : (-2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0,48, \\ x < 0,5. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 14) находим, что множество решений неравенства есть интервал $(0,48; 0,5)$.

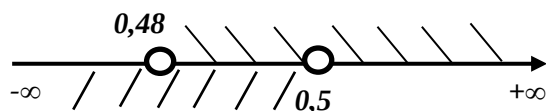


Рисунок 14

Задания для самостоятельного решения

1. Решить неравенство: а) $3x - (x-3) \leq 5x$; б) $3 - 4x > 11 - 8(x-2)$; в) $x^2 - 6x - 7 < 0$;

г) $x^2 \geq -9x - 14$; д) $\frac{x+6}{x-2} \geq 0$.

2. Решить неравенство: а) $\log_{0,5} x \geq -2$; б) $\log_3(x-2) \geq -1$; в) $2^{5x} \geq \frac{1}{4}$; г) $3^{x-5} < 81$.

Ответы: 1. а) $x \in [1; +\infty)$; б) $x \in (6; +\infty)$; в) $x \in (-1; 7)$; г) $x \in (-\infty; 2] \cup [7; +\infty)$; д) $x \in (-\infty; -6] \cup (2; +\infty)$.

2. а) $x \in (0; 4]$; б) $x \in \left(2; 2\frac{1}{3}\right]$ в) $x \in [-0,4; +\infty)$; г) $x \in (-\infty; 9)$.