МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
АНГАРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Мусева Т.Н., Свердлова О.Л., Туркина Н.М.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Ангарск, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Комплексные числа, в отличии от натуральных, целых и рациональных чисел, не являются объектами, используемыми при подсчетах и измерениях.

Комплексные числа вошли в математику в XVI веке как квадратные корни из отрицательного числа. В XIX веке была дана геометрическая интерпретация комплексных чисел, а также правила действий над ними, в результате чего использование комплексных чисел стало общепринятым.

Одним из способов построения множества комплексных чисел является расширение множества действительных чисел путем присоединения к нему нового числового объекта – корня уравнения $x^2+1=0$.

В настоящее время комплексные числа и функции комплексного переменного имеют широкое применение в гидродинамике, картографии, электротехнике.

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Основные определения

Комплексное число имеет вид $x+iy$, где x и y - действительные числа; i - мнимая единица, определяемая соотношением $i^2=-1$.

Обычно комплексное число $x+iy$ обозначают одной буквой z. Запись вида $z=x+iy$ называют *алгебраической формой записи* комплексного числа. При этом число x называется действительной частью числа z $(x=\operatorname{Re} z)$, $y-$мнимой частью $(y=\operatorname{Im} z)$.

Если $x=0$, то число $0+iy=iy$ - является чисто мнимым; если $y=0$, то число $x+i0=x$ - действительное число.

Очевидно, что множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел. Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C; $R\subset C$, где R - множество действительных чисел.

Пример 1.1.

$2+i\cdot 3$ - комплексное число;

$i\cdot 2=2i$ - чисто мнимое число;

3 - действительное число.

<u>Определение 1.1.</u> Комплексные числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

(1.1)

Определение 1.2. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются комплексно сопряженными.

Комплексное число равно нулю $(z = 0)$, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части: $x = y = 0$.

1.2. Действия над комплексными числами

1) Сумма двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ есть комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. **(1.2)**

2) Разность двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ есть комплексное число $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. **(1.3)**

3) Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ есть комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. **(1.4)**

Замечание. Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел производят по обычным правилам алгебры, заменяя i^2 на -1 всякий раз, когда i^2 появляется в процессе вычислений.

4) Деление двух комплексных чисел вводится как действие, обратное умножению. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $(z_2 \neq 0)$. Тогда $\frac{z_1}{z_2} = z$ есть такое комплексное число, что $z_1 = z_2 \cdot z$, где

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad \textbf{(1.5)}$$

Практически, чтобы разделить число $z_1 = x_1 + iy_1$ на $z_2 = x_2 + iy_2$, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1.2.

Даны комплексные числа $z_1 = 3+8i, \quad z_2 = 1-3i$.

Найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_2 - z_1$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $z_1 \cdot \bar{z}_1$; д) $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Решение:

Используя формулы ***(1.2)-(1.5)***

а) $z_1 + z_2 = (3+8i)+(1-3i) = 4+5i$;

б) $z_2 - z_1 = (1-3i)-(3+8i) = -2-11i$;

в) $z_1 z_2 = (3+8i)(1-3i) = 3+8i-9i-24i^2 = \left[i^2 = -1\right] = 27 - i$;

г) $z_1 \overline{z_1} = (3+8i)(3-8i) = 9-64i^2 = 73$;

д) $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1-3i}{3+8i} = \dfrac{(1-3i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)} = \dfrac{3-9i-8i+24i^2}{9-64i^2} = \dfrac{-27-17i}{73} =$

$= -\dfrac{27}{73} - \dfrac{17}{73} i$.

§ 2. Тригонометрическая форма комплексного числа

2.1. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Каждой точке M координатной плоскости Oxy можно поставить в соответствие упорядоченную пару действительных чисел (x_1, y_1): $M \leftrightarrow (x_1, y_1)$.

С другой стороны, каждое комплексное число $z_1 = x_1 + iy_1$ можно отождествить с упорядоченной парой действительных чисел (x_1, y_1), где $x_1 = \operatorname{Re} z_1$, $y_1 = \operatorname{Im} z_1$. Т.о., каждое комплексное число

$z_1 = x_1 + iy_1$ можно отождествить с точкой координатной плоскости Oxy.

<u>*Определение 2.1.*</u> Плоскость, каждой точке которой соответствует комплексное число, называется комплексной плоскостью (рис. 1). Действительные числа x изображают точками оси Ox, поэтому она называется действительной осью, а чисто мнимые числа iy - точками оси Oy, которую называют мнимой осью.

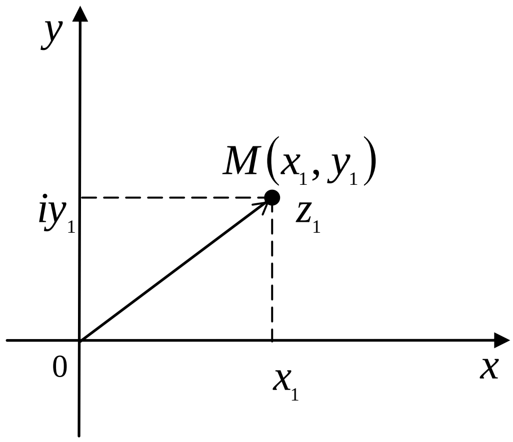


Рис. 1

Замечание 1. Каждой точке M координатной плоскости Oxy можно поставить в соответствие радиус-вектор $\overline{OM}$, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x_1, y_1)$.

Пример 2.1.

Построить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1 = 2i,\ z_2 = -3i,\ z_3 = 5,\ z_4 = 1 + 2i,\ \overline{z_4} = 1 - 2i,\ z_5 = -3 + 3i$.

Решение:

Построим комплексную плоскость. Каждому числу на комплексной плоскости поставим в соответствие вектор (рис. 2).

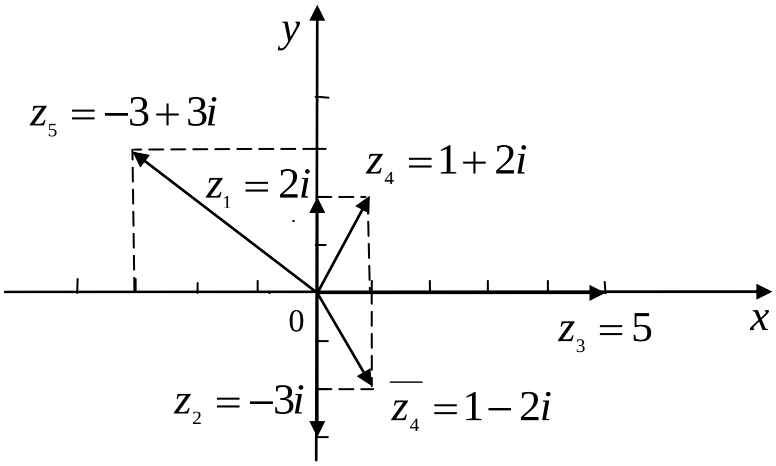


Рис. 2

Геометрически сложение и вычитание комплексных чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения и вычитания векторов (рис. 3).

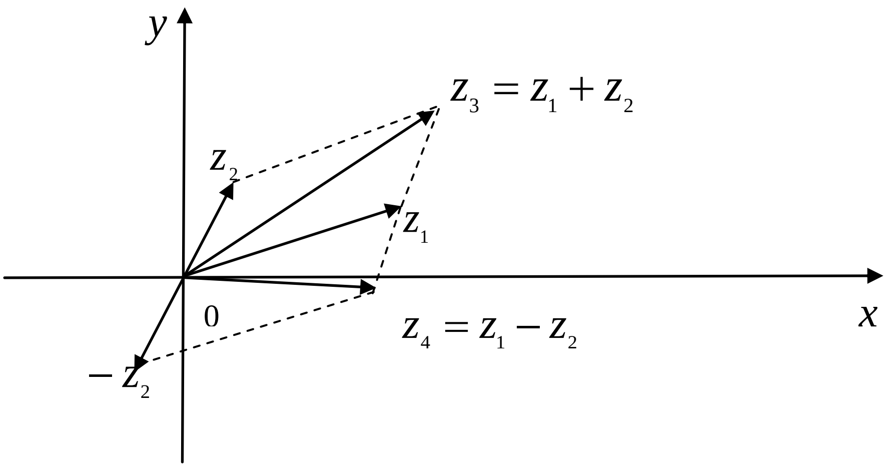


Рис. 3

2.2. Запись комплексного числа в тригонометрической форме

Выберем на комплексной плоскости Oxy полярную систему координат так, чтобы полюс совпадал с началом координат, а полярная ось совпадала с положительным направлением оси Ox.

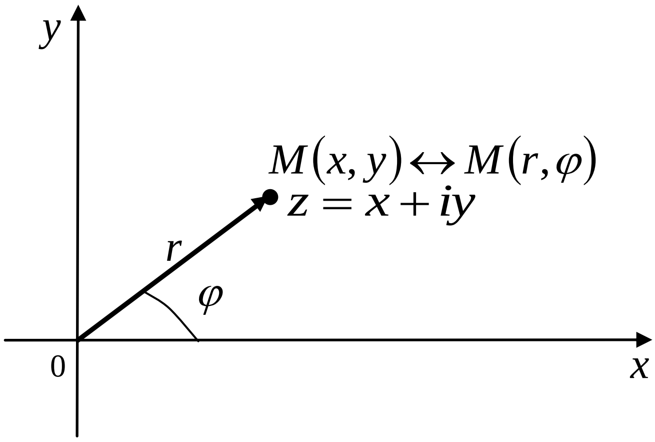


Рис. 4

Обозначим через r расстояние точки $z=x+iy$ от начала координат, а через φ - угол между положительным направлением действительной оси Ox и радиус-вектором $\overline{OM}$, т.е. (r,φ) - полярные координаты точки $M(x,y)$ (рис. 4). По формулам $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$ связывающим прямоугольные и полярные координаты точки M, получаем, что $x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, тогда

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad \textbf{(2.1)}$$

называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа $z=x+iy$. Число r называется *модулем* комплексного числа $x+iy$ и обозначается $r=|z|=|x+iy|$; число φ - называется *аргументом* и обозначается: $\varphi=Arg\,z=Arg(x+iy)$.

Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Аргумент комплексного числа $x+iy\neq 0$ величина многозначная: $Arg\,z=\arg z+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, где $\arg z=\varphi_0$ - *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $[0,2\pi)$, т.е. $0\le\varphi_0<2\pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $(-\pi, \pi]$).

Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Аргумент z можно найти, используя формулу $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$. Так как $0 \le \varphi < 2\pi$, то

$$\varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x},\ \textit{если}\ x > 0,\ y > 0; \\ \pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|,\ \textit{если}\ x < 0,\ y > 0; \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x},\ \textit{если}\ x < 0,\ y < 0; \\ 2\pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|,\ \textit{если}\ x > 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Замечание 2. Если действительная часть x комплексного числа $z = x + iy$ положительна, т.е. $x > 0$, а мнимая часть $y = 0$, то $\arg z = 0$; если $x < 0$, то $\arg z = \pi$.

Если число z является чисто мнимым и $y > 0$, то $\arg(iy) = \dfrac{\pi}{2}$; если $y < 0$, то $\arg(iy) = \dfrac{3\pi}{2}$.

Пример 2.2.

Записать комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = 1 - i$; б) $z = 2i$.

Решение:

а) Число $z = 1 - i$ расположено в IV четверти $(x = 1 > 0, y = -1 < 0)$.

Используя формулы ***(2.2), (2.3)***, находим:

$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

$\varphi = \arg z = 2\pi - arctg\left|\dfrac{1}{-1}\right| = 2\pi - arctg1 = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$ (см. приложение).

По формуле ***(2.1)*** число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме имеет вид: $1 - i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4})$.

б) $z = 2i$ - чисто мнимое число, $y > 0$, следовательно $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (см. замечание 2),

$r = |z| = \sqrt{0 + 2^2} = 2$. Тогда, $2i = 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$.

Утверждение. Два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, равны друг другу тогда и только тогда, когда модули у них равны, а аргументы равны или отличаются на число, кратное 2π: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, если

$r = \rho, \varphi = \psi + 2\pi k$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$

2.3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть комплексные числа даны в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1) Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$$

$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad \textbf{\textit{(2.4)}}$$

При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2) Деление комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right]. \qquad \textbf{\textit{(2.5)}}$$

Для проверки данного равенства достаточно умножить делитель на частное:

$$r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right]=$$

$$=r_2\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2\right)\right]=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2\right).$$

При делении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3) Возведение комплексного числа в целую положительную степень $n\in N$. По определению степени имеем:

$$z^n=\underbrace{\mathrm{z}\cdot\mathrm{z}\cdot\ldots\cdot\mathrm{z}}_{n\text{ раз}}=\underbrace{\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}\cdot\ldots\cdot\mathrm{r}}_{n\text{ раз}}\left[\cos\left(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ раз}}\right)+i\sin\left(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ раз}}\right)\right],$$

т.е. $z^n=\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right),\ \left(z\neq 0,\ n\in N\right)$ ***(2.6)***

формула Муавра.

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

4) Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа z. Пусть $n\in N$.

<u>*Определение 2.2*</u>. Корнем *n-ой* степени из комплексного числа называется такое комплексное число, *n-ая* степень которого равняется подкоренному числу, т.е.

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, если

$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (n \in N)$.

Так как у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, то $\rho^n = r$,

$n\psi = \varphi + 2\pi k$.

Отсюда находим:

$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где k - любое целое число; $\sqrt[n]{r}$ - арифметическое значение корня.

Т.о., получаем

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad \textbf{\textit{(2.7)}}$$

Придавая k значения, $0,1,2,\ldots,n-1$, получим n различных значений корня.

Замечание 3. Комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа z, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n- угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке $z = 0$.

Пример 2.3.

Вычислить $\dfrac{\left(-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}\right)^{11}}{2^8}$.

Решение:

Так как в алгебраической форме вычисления окажутся достаточно трудоемкими, представим числитель и знаменатель дроби в тригонометрической форме.

Пусть $z_1 = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$, $z_2 = 2$.

Запишем число $z_1 = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 4,$$

$$\varphi_1 = \arg\left(-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}\right) = \pi - arctg\left|\frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}\right| = \frac{3\pi}{4}$$ (см. приложение),

т.е. $z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (см. формулу ***(2.3)***).

Запишем число $z_2 = 2$ в тригонометрической форме:

$r_2 = |z_2| = 2$, $\varphi_2 = 0$ (см. замечание 2), т.е. $z_2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$.

Используя формулу Муавра, находим

$$\frac{\left(-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}\right)^{11}}{2^8} = \frac{\left[2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{11}}{\left[2(\cos 0 + i\sin 0)\right]^8} =$$

$$= \frac{2^{11}\left(\cos 11\cdot\frac{3\pi}{4} + i\sin 11\cdot\frac{3\pi}{4}\right)}{2^8(\cos 8\cdot 0 + i\sin 8\cdot 0)} =$$

$$= 2^3\left(\cos\frac{33\pi}{4} + i\sin\frac{33\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\frac{32\pi+\pi}{4} + i\sin\frac{32\pi+\pi}{4}\right) =$$

$$= 8\left(\cos\left(4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\sqrt{2}(1+i).$$

Пример 2.4.

Найти все значения $\sqrt[6]{-64}$.

Решение:

Запишем число $z = -64$ в тригонометрической форме:

$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Применяя формулу ***(2.7)***, получаем

$$\sqrt[6]{64(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right),$$

где k пробегает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5.

1) $k = 0,\ z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= \sqrt{3} + i,$

2) $k = 1,\ z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$

3) $k = 2,\ z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$

$= -\sqrt{3} + i,$

4) $k = 3,\ z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$

$= -\sqrt{3} - i,$

5) $k = 4,\ z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 4}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 4}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) =$

$= -2i,$

6) $k = 5,\ z_5 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 5}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 5}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) =$

$= \sqrt{3} - i.$

Изобразим полученные комплексные числа (рис. 5).

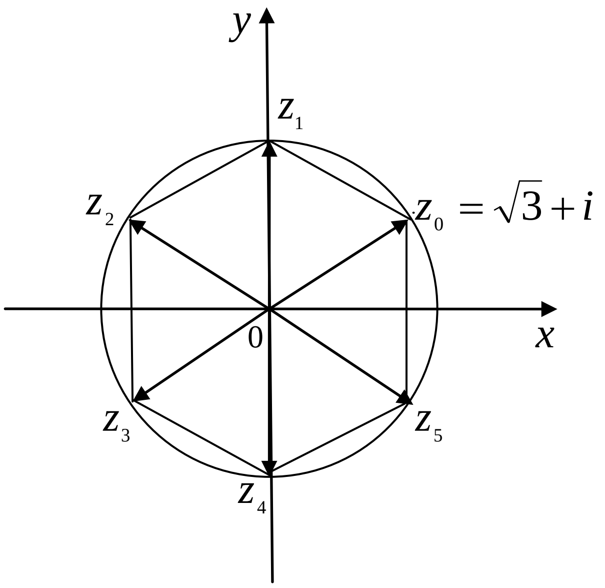


Рис. 5

§ 3. Показательная форма комплексного числа

3.1. Запись комплексного числа в показательной форме

Используя *формулы Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \qquad \textbf{\textit{(3.1)}}$$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой *показательной (или экспоненциальной)* форме

$$z = re^{i\varphi}, \qquad \textbf{\textit{(3.2)}}$$

где r - модуль комплексного числа, φ - аргумент комплексного числа.

Из равенств ***(3.1)*** следует

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad \textbf{\textit{(3.3)}}$$

3.2. Действия над комплексными числами в показательной форме

Пусть заданы комплексные числа в показательной форме:

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

1) Умножение комплексных чисел в показательной форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \qquad \textbf{\textit{(3.4)}}$$

При умножении двух комплексных чисел, заданных в показательной форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2) Деление комплексных чисел в показательной форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad \textbf{\textit{(3.5)}}$$

При делении двух комплексных чисел, заданных в показательной форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3) Возведение комплексного числа в показательной форме в целую положительную степень $n \in N$:

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}. \qquad \textbf{\textit{(3.6)}}$$

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

4) Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа z в показательной форме:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \left(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right), \text{ где } n \in N. \qquad \textbf{\textit{(3.7)}}$$

По определению 2.2 (см. § 2) имеем: $\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \rho e^{i\psi}$, если $\rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi}$ $\left(n \in N\right)$, где $\rho^n = r, n\psi = \varphi + 2\pi k.$

Следовательно, $\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},$ k - любое целое число; $\sqrt[n]{r}$ - арифметическое значение корня. Тогда получаем:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}.$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных значений корня.

Пример 3.1.

Представить комплексные числа $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ и $z_2 = -5i$ в показательной форме.

Решение:

Число $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ расположено в I четверти $(x = 1 > 0, y = \sqrt{3} > 0)$.

Используя формулы ***(2.2), (2.3),*** находим:

$r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\varphi = \arg\left(1+\sqrt{3}\,i\right) = arctg\,\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$ (см. приложение). По формуле ***(3.2)*** получаем: $1+\sqrt{3}\,i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Число $z_2 = -5i$ - чисто мнимое число, $y < 0$, следовательно,

$\varphi = \arg(-5i) = \dfrac{3\pi}{2}$ (см. замечание 2 §2), $r_2 = |z_2| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$, т.е. $-5i = 5e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Пример 3.2.

Даны комплексны числа $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Найти:

а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\dfrac{z_1}{z_2}$; в) $(z_3)^6$; г) $\sqrt[3]{z_3}$.

Решение:

а) По формуле ***(3.4)*** получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}};$$

б) Применяя формулу ***(3.5),*** находим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

в) По формуле ***(3.6)*** $(z_3)^6 = \left[2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right]^6 = 2^6 e^{i6\cdot\frac{4\pi}{3}} = 2^6 e^{i8\pi} = 64e^{i8\pi}$.

г) По формуле ***(3.7)*** $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{3}}$, где $k=0,1,2$.

1) $k=0,\ z_0=\sqrt[3]{2}e^{\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{9}}$;

2) $k=1,\ z_1=\sqrt[3]{2}e^{\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{10\pi}{9}}$;

3) $k=2,\ z_2=\sqrt[3]{2}e^{\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{16\pi}{9}}$.

§ 4. Построение множеств комплексных чисел

В § 2 было рассмотрено геометрическое изображение комплексных чисел, в дальнейшем нас будет интересовать изображение не только отдельных комплексных чисел, но и множества комплексных чисел, которые задаются с помощью равенств или неравенств или систем неравенств. Рассмотрим изображение наиболее часто встречающихся множеств комплексных чисел.

Пример 4.1.

Изобразить на комплексной плоскости множества точек z, удовлетворяющих условиям:

а) $|z-z_0|=R$;

б) $|z-z_0|<R$;

в) $|z-z_0|>R$;

г) $r<|z-z_0|<R$;

z_0 - фиксированное комплексное число, r, R - действительные числа $(r>0,\ R>0)$.

Решение:

а) Пусть $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Тогда $|z - z_0| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$, или

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Это уравнение окружности с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и радиусом R.

Таким образом, $|z - z_0| = R$ задает множество точек z комплексной плоскости, удаленных от точки z_0 на расстояние R (рис. 6).

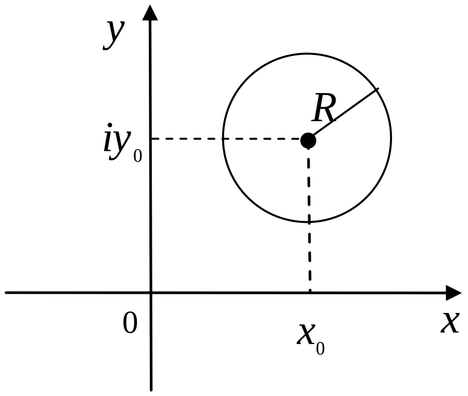


Рис. 6

б) Множество точек z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| = R$, лежат на окружности с центром в точке z_0 и радиусом R (см. пример 4.1, а). Тогда неравенство $|z - z_0| < R$ задает множество точек z, расстояние от которых до точки z_0 меньше R (рис. 7).

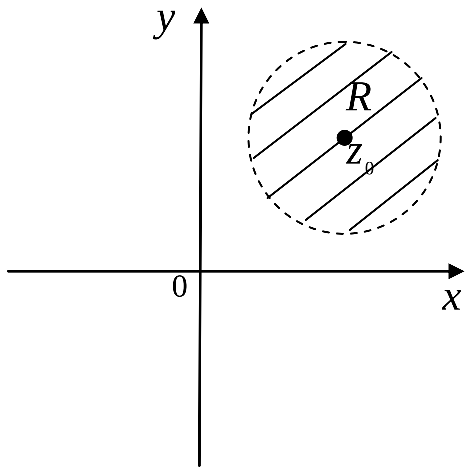


Рис. 7

в) Неравенство $|z - z_0| > R$ определяет множество точек z, расстояние от которых до точки z_0 больше R (рис. 8).

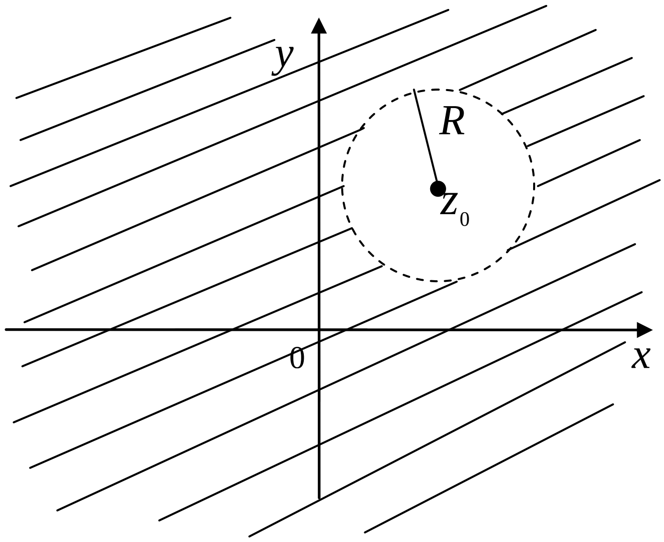


Рис. 8

г) Неравенство $r < |z - z_0| < R$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} |z - z_0| > r, \\ |z - z_0| < R. \end{cases}$ Решением первого неравенства системы является множество точек z, лежащих вне круга с центром в точке z_0 и радиусом r (см. пример 4.1, в). Решение второго неравенства системы определяет множество точек z, лежащих внутри круга с центром в точке z_0 и радиусом R (см. пример 4.1, б). Тогда множество точек плоскости, задаваемое двойным неравенством $r < |z - z_0| < R$, есть пересечение множеств решений первого и второго неравенств, т. е. определяет кольцо, ограниченное окружностями с центром в точке z_0 и радиусами r и R (рис. 9).

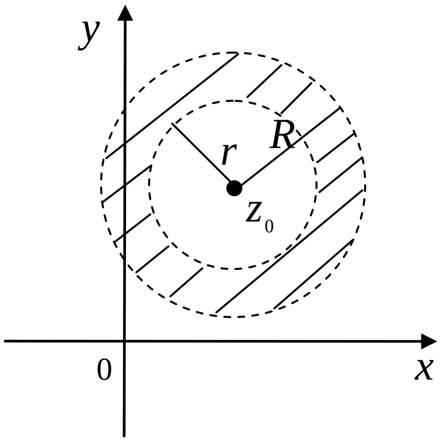


Рис. 9

Пример 4.2.

Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

а) $|z-z_1|=|z-z_2|$, если $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$;

б) $\operatorname{Re} z=a$;

в) $\operatorname{Im} z>b$.

Решение:

а) Так как $|z-z_1|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$,

$|z-z_2|=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$, то исходное равенство примет вид

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

Выполним следующие преобразования:

1. Возведем обе части равенства в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right)^2$$
$$\Rightarrow (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2.$$

2. Раскроем скобки в левой и правой частях равенства:

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2=x^2-2xx_2+y_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2.$$

3. Приведем подобные слагаемые:

$$x(-2x_1+2x_2)+y(-2y_1+2y_2)+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0.$$

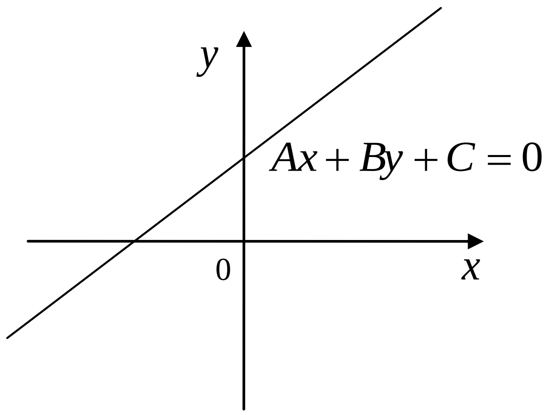
Введем обозначения: $A = -2x_1 + 2x_2$, $B = -2y_1 + 2y_2$,

$C = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$.

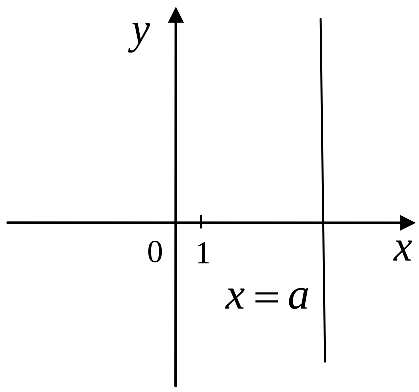
В результате получим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$.

Таким образом, равенство $|z - z_1| = |z - z_2|$ определяет множество точек z, лежащих на прямой $Ax + By + C = 0$ (рис. 10, а).

б) Так как $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Re} z = x$, то исходное уравнение примет вид $x = a$. Это уравнение определяет прямую, проходящую через точку $(a, 0)$ и параллельную оси Oy (рис. 10, б).



а)



б)

Рис. 10

в) Неравенство $\operatorname{Im} z > b$ определяет верхнюю полуплоскость относительно прямой $y = b$, так как $\operatorname{Im} z = y$ (рис. 11).

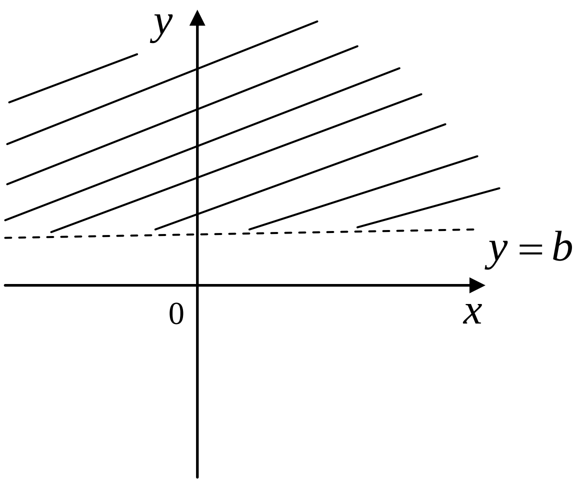


Рис. 11

Пример 4.3.

Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $-1 < \operatorname{Re} z < 1$;

б) $|z-1| + |z+1| < 3$;

в) $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$.

Решение:

а) $\operatorname{Re} z = x \Rightarrow -1 < x < 1$, т.е. этому условию удовлетворяют точки z, лежащие в полосе между прямыми $x = -1$ и $x = 1$, параллельными оси Oy (рис. 12).

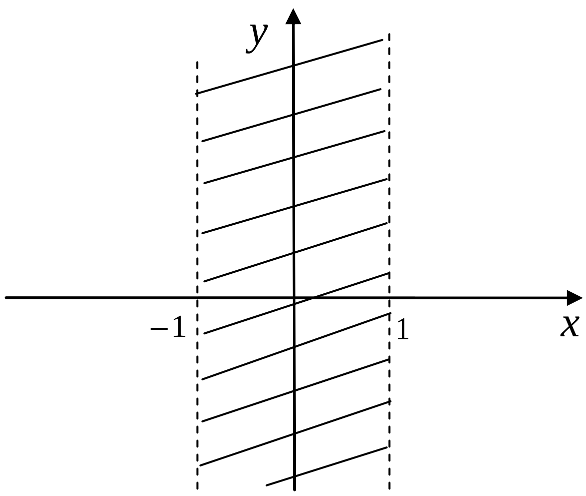


Рис. 12

б) Равенство $|z-1| + |z+1| = 3$ означает, что сумма расстояний от точки z до точек +1 и -1 равна 3. Геометрическое место таких точек есть эллипс с фокусами -1 и 1 и с большой осью, равной 3. Значит, данное неравенство задает область, лежащую внутри этого эллипса (рис. 13).

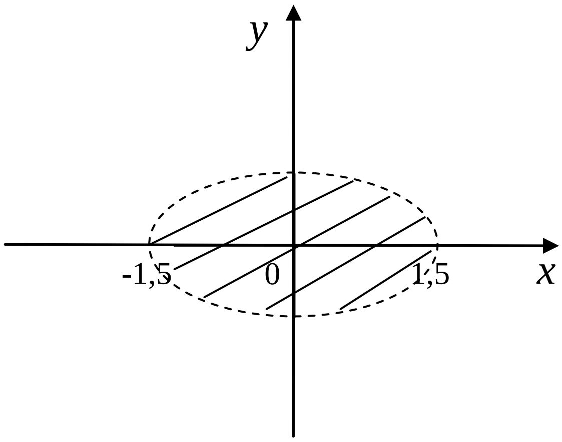


Рис. 13

в) Неравенство $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$ выражает множество точек, радиус-векторы которых образуют с положительным направлением оси Ox углы, лежащие в границах от $-\dfrac{\pi}{4}$ до $\dfrac{\pi}{4}$, включая границы; очевидно, что все такие точки z лежат внутри угла, вершина которого находится в начале координат, а сторонами являются лучи, образующие с положительным направлением оси Ox углы $-\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{4}$ (рис.14).

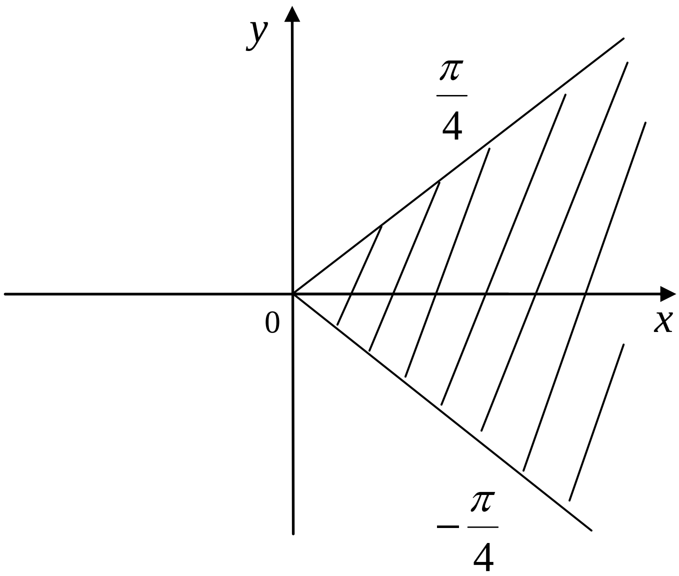


Рис. 14

§ 5. Многочлены и алгебраические уравнения

Определение 5.1. *Многочленом* (полиномом или целой рациональной функцией) n–ой $(n \in N)$ степени с коэффициентами $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ называется функция

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \qquad \textbf{(5.1)}$$

где z принадлежит множеству комплексных чисел.

Определение 5.2. Уравнение вида

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \ (a \neq 0) \qquad \textbf{(5.2)}$$

называется *алгебраическим уравнением* n–ой $(n \in N)$ степени.

Определение 5.3. *Корнем многочлена* $P_n(z)$ называется такое значение переменного z_0, при котором многочлен обращается в нуль $(P_n(z_0) = 0)$.

Теорема 5.1. Целые корни любого многочлена с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Теорема 5.2. Если z_0 корень многочлена $(P_n(z_0) = 0)$, то $P_n(z)$ делится без остатка на $z - z_0$, т.е. многочлен представим в виде произведения $P_n(z) = (z - z_0) \cdot P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ - многочлен степени $(n-1)$.

Теорема 5.3. (основная теорема алгебры - теорема Гаусса)

Многочлен n–ой степени на множестве комплексных чисел имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Если коэффициенты многочлена ***(5.1)*** действительные числа и $z_0 = x_0 + iy_0$ - его комплексный корень, то сопряженное число

$\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$ ткже корень многочлена, причем z_0 и $\overline{z_0}$ имеют одинаковую кратность.

Пусть многочлен $P_n(z)$ имеет корни $z_1, z_2, \ldots, z_m (m \le n)$ соответственно кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_m (k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$, тогда многочлен ***(5.1)*** можно разложить на множители, т.е. справедливо равенство:

$$P_n(z) = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}. \qquad \textbf{\textit{(5.3)}}$$

Если при этом коэффициенты многочлена – действительные числа, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно сопряженным корням, в разложении получим квадратичные множители с действительными коэффициентами.

Пример 5.1.

Разложить на множители многочлен $P_3(z) = z^3 - 6z - 9$.

Решение:

Найдем корни уравнения $z^3 - 6z - 9 = 0$. Рассматривая делители свободного члена (***теорема 5.1***), убеждаемся в том, что только $z = 3$ является целым корнем уравнения $(3^3 - 6 \cdot 3 - 9 = 0)$. Следовательно, многочлен $P_3(z) = z^3 - 6z - 9$ должен делиться без остатка на многочлен $z - 3$ (***теорема 5.2***).

Разделим

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,z^3 \quad -6z-9 & \dfrac{z-3}{z^2+3z+3} \\
\underline{z^3-3z^2} & \\
\qquad \_\,3z^2-6z & \\
\qquad\quad \underline{3z^2-9z} & \\
\qquad\qquad \_\,3z-9 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{3z-9} & \\
\qquad\qquad\qquad 0. &
\end{array}
$$

В итоге имеем: $P_3(z)=z^3-6z-9=(z-3)(z^2+3z+3)$.

Найдем корни квадратного трехчлена z^2+3z+3, для этого решим уравнение $z^2+3z+3=0$.

Корни квадратного уравнения $a\,z^2+bz+c=0\;(a\neq 0)$ находим по формуле $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Тогда,

$z^2+3z+3=0$ имеет корни $z_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}$,

$z_1=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.

Окончательно получаем корни многочлена $P_3(z)=z^3-6z-9$:

$$
z_1=3,\; z_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\; z_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\Rightarrow
$$

$$
P_3(z)=z^3-6z-9=(z-3)(z^2+3z+3)=
$$

$$
=(z-3)\left(z-\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).
$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

1-10. Даны числа z_1, z_2, z_3. Выполнить следующие действия:

а) $z_1 + z_3$; б) $z_3 - z_1$; в) $z_2 z_3$; г) $z_1 \bar{z}_1$; д) $\frac{z_2}{z_1}$.

1. $z_1 = 1 + 4i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = -2 - 3i.$

2. $z_1 = -4 + i, \quad z_2 = 2 - 3i, \quad z_3 = 2 + 2i.$

3. $z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = 3 - 4i, \quad z_3 = 5 + i.$

4. $z_1 = -3 + i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 3 - 5i.$

5. $z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -2 + 2i, \quad z_3 = -1 - 5i.$

6. $z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = -4i, \quad z_3 = -1 + 3i.$

7. $z_1 = -5 + 3i, \quad z_2 = -1 - 4i, \quad z_3 = -5 + 3i.$

8. $z_1 = 2 + 4i, \quad z_2 = -5i, \quad z_3 = 1 - 3i.$

9. $z_1 = 1 + 5i, \quad z_2 = 3 - 3i, \quad z_3 = -2 + 3i.$

10. $z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = -3i.$

11-20. Дано число z:

а) представить число z в тригонометрической и показательной форме;

б) найти z^5;

в) вычислить $\sqrt[4]{z}$.

11. $z = 1 + \sqrt{3}i.$
12. $z = -4 - 4i.$
13. $z = \sqrt{3} - i.$
14. $z = -2 + 2\sqrt{3}i.$
16. $z = \sqrt{12} - 2i$
17. $z = -2 - 2i.$
18. $z = -3 + \sqrt{3}i$
19. $z = 2 + \sqrt{12}i.$

15. $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$ 20. $z=-5-5i.$

21-30. Вычислить:

21. $\frac{\left(-8+8i\sqrt{3}\right)^{21}}{2^{84}}.$ 26. $\frac{\left(64\sqrt{2}-64i\sqrt{2}\right)^{19}}{2^{133}}.$

22. $\frac{\left(-128+128i\sqrt{3}\right)^{11}}{2^{88}}.$ 27. $\frac{\left(256\sqrt{2}-256i\sqrt{2}\right)^{15}}{2^{135}}.$

23. $\frac{\left(256\sqrt{2}+256i\sqrt{2}\right)^{18}}{2^{162}}.$ 28. $\frac{\left(-32-32i\sqrt{3}\right)^{14}}{2^{84}}.$

24. $\frac{\left(16+16i\sqrt{2}\right)^{12}}{2^{60}}.$ 29. $\frac{\left(-8-8i\sqrt{3}\right)^{20}}{2^{80}}.$

25. $\frac{\left(-32+32i\sqrt{3}\right)^{21}}{2^{102}}.$ 30. $\frac{\left(64\sqrt{2}-64i\sqrt{2}\right)^{21}}{2^{147}}.$

31-40. Изобразить на рисунке множество точек комплексной области, удовлетворяющих условию:

31. $|z+2i-1|\le 2.$ 36. $0<\operatorname{Im}(z-3)<1.$

32. $|z-i|<|z+i|.$ 37. $1\le|z+2i|\le 3,\ -2\le \operatorname{Re} z\le\frac{5}{2}.$

33. $\frac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2}.$ 38. $\operatorname{Re}\left(z(1-i)\right)\le\sqrt{2}.$

34. $1<|z+2|\le 2.$ 39. $|z+1+i|>\sqrt{2}.$

35. $|z-1+i|\ge 1,\ \operatorname{Re} z<1.$ 40. $2<|z+i|\le 3.$

41-50. Решить уравнения:

41. а) $4z^2+5=0;$ б) $z^3+8=0.$

42. а) $z^2+2=0;$ б) $z^3-27=0.$

43.а) $10z^2+169=0$; б) $z^3-2z+1=0$.

44. а) $2z^2+64=0$; б) $z^3+64=0$.

45. а) $3z^2+8=0$; б) $z^3+2z+3=0$.

46. а) $z^2+16=0$; б) $z^3-125=0$.

47. а) $3z^2+41=0$; б) $z^3+9z+54=0$.

48. а) $6z^2+25=0$; б) $z^3+216=0$.

49. а) $2z^2+7=0$; б) $z^3+3z^2+3z+9=0$.

50. а) $7z^2+10=0$; б) $z^3+z^2+z+1=0$.

ГЛАВА 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 6. Основные понятия теории функции комплексного переменного

6.1. Понятие области на комплексной плоскости

Пусть дано некоторое множество D.

Определение 6.1. *Областью* на комплексной плоскости называется множество D точек, обладающих следующими свойствами:

1) каждая точка области обладает столь малой окрестностью, что все точки окрестности принадлежат области D;

2) каждые две точки области D можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат области.

Определение 6.2. Точка A называется *внутренней* точкой множества D, если существует достаточно малая ее окрестность, все точки которой принадлежат данному множеству.

Определение 6.3. Точка A называется *внешней* точкой множества D, если можно указать достаточно малую ее окрестность, все точки которой не принадлежат множеству D.

Определение 6.4. Точка A называется *граничной* точкой множества, если какую бы малую ее окрестность мы не взяли, в ней будут точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству D.

На рисунке 15 точка A - граничная, B - внешняя, C - внутренняя.

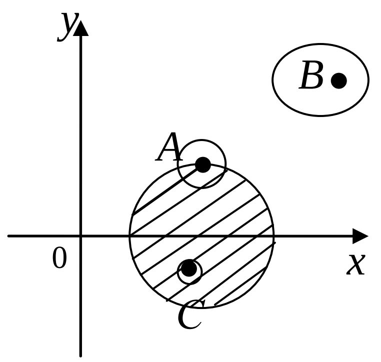


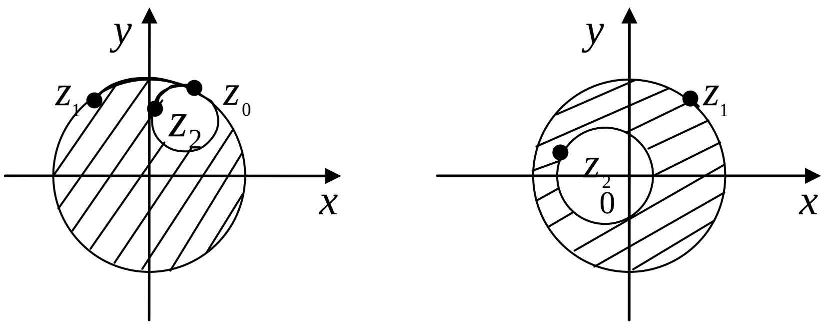
Рис. 15

<u>*Определение 6.5.*</u> Совокупность всех граничных точек области называется *границей области.*

<u>*Определение 6.6.*</u> Множество называется *связным*, если всякие две точки его можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству.

Учитывая введенные определения, областью можно назвать связное множество, все точки которого внутренние.

<u>*Определение 6.7.*</u> Область, граница которой связана, называется *односвязной*.



а) ***б)***

Рис. 16

На рисунке 16, *а* изображена область, ограниченная двумя изнутри касающимися окружностями. Граничные точки этой области образуют связное множество, так как любые две граничные точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству граничных точек. Например, точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывной кривой $z_1z_0z_2$, составленной из дуг z_1z_0 и z_0z_2. Область является односвязной.

На рисунке 16, *б* изображена область, ограниченная двумя некасающимися окружностями. Граничное множество состоит из точек внутренней и внешней окружностей. Множество граничных точек несвязно. Например, точку z_1 и z_2 нельзя соединить непрерывной кривой, все точки которой граничные. Область неодносвязна. По числу граничных кривых область называют двусвязной.

6.2. Понятие функции комплексного переменного

Определение 6.8. Если каждому комплексному числу $z \in D$ по некоторому правилу или закону поставлено в соответствие одно число $w \in E$ или совокупность комплексных чисел $w \in E$, то говорят, что на области D задана *функция комплексного переменного*, отображающая множество D во множество E.

Обозначают функцию $w = f(z)$.

Множество D - *область определения* функции; множество E - *область значений* функции.

Определение 6.9. Функция называется *однозначной*, если каждому числу $z \in D$ поставлено в соответствие только одно число $w \in E$, в противном случае функция называется *многозначной.*

Пример 6.1.

Найти область определения функции; определить вид функции по количеству ее значений (однозначная или многозначная).

а) $w = \dfrac{1}{z}$; б) $w = z - \sqrt{z+1}$.

Решение:

а) Область определения функции $w = \dfrac{1}{z}$ есть множество всех точек комплексной плоскости, кроме $z = 0$. Функция однозначна, так как каждому комплексному числу $z \in D$ поставлено в соответствие единственное число w:

если $z = 1 + i$, то $w = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \dfrac{1-i}{2}$;

если $z = 2i$, то $w = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{1}{2}i$ и т.д.

б) Область определения функции $w = z - \sqrt{z+1}$ есть множество всех точек плоскости. Функция двузначна, так как каждому значению $z \in D$ соответствует два значения функции: w_1 и w_2. Например, если $z = 0$, то $w = -\sqrt{1}$. Найдем значение $\sqrt{1}$. Запишем число 1 в тригонометрической форме: $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$(см. Глава 1, § 2, п. 2.2).

Применяя формулу ***(2.7)***, получаем

$$\sqrt{1} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{2} + i\sin\frac{0+2\pi k}{2}\right), \Rightarrow$$

1) $k = 0, \sqrt{1} = (\cos 0 + i\sin 0) = 1, \Rightarrow w_1 = -1$;

2) $k = 1, \sqrt{1} = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1, \Rightarrow w_2 = 1$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для других значений z.

Пусть в области D комплексной плоскости определена функция $w = f(z)$, т.е. каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие число $w=u+iv$. Эту функцию можно представить в виде

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где **(6.1)**

$u=u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ - *действительная часть функции* $f(z)$,

$v=v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ - *мнимая часть функции* $f(z)$.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Пример 6.2.

Найти действительную и мнимую части функции $w=\dfrac{1}{z}$.

Решение:

Функцию $w=\dfrac{1}{z}$ можно записать в виде:

$w=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}=u+iv$. Отсюда следует:

$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

§ 7. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

7.1. Предел функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0.

<u>*Определение 7.1.*</u> Число C называется *пределом функции* $w=f(z)$ в точке z_0 (или при $z\to z_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется такое малое число $\delta>0$, что для всех $z\neq z_0$,

удовлетворяющих условию $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-C|<\varepsilon$, т.е. $|f(z)-C|\to 0$ при $|z-z_0|\to 0$ (z_0 и C - комплексные числа).

Записывают: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=C$.

<u>*Определение 7.2.*</u> Число C называется *пределом функции* $w=f(z)$ при $z\to\infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется столь большое $R>0$, что для всех z, удовлетворяющих условию $|z|>R$, выполняется неравенство $|f(z)-C|<\varepsilon$ (z_0, C и R - комплексные числа).

Записывают: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=C$.

Предел функции не всегда существует. Например, не существует $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$, даже если z пробегает лишь действительные значения, так как функция $w=\sin\frac{1}{z}$, определенная при всех значениях z, кроме $z=0$, не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечному при $z\to 0$ (значение функции $\sin(\infty)$ не определено).

Теоремы об арифметических свойствах пределов функций действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного.

<u>***Теорема 7.1.***</u> Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют пределы в точке $z_0\in D$, тогда:

1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$, если $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$;

4) $\lim\limits_{z\to z_0} c\, f(z)=c\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, где c - постоянная.

<u>Теорема 7.2.</u> Если функция комплексного переменного имеет предел, то имеют предел как ее действительная, так и мнимая часть, причем действительная часть функции стремится к действительной части предела, а мнимая часть функции - к мнимой части предела.

Т.е., если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ имеет $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=C$, где $C=u_0+iv_0$,

то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

Справедлива и обратная теорема.

7.2. Непрерывность функции комплексного переменного

<u>Определение 7.3.</u> Функция $w=f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

<u>Определение 7.4.</u> Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется *непрерывной в этой области*.

Из теоремы 7.2 следует, что если в точке $z_0=x_0+iy_0$ функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ непрерывна, то в ней непрерывна как действительная, так и мнимая часть функции, т.е. $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке (x_0,y_0).

<u>Теорема 7.3.</u> Если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в точке z_0, то в этой точке непрерывны сумма $f(z)+g(z)$, произведение $f(z)\cdot g(z)$ и частное $\dfrac{f(z)}{g(z)}$; последнее – при условии, что $g(z_0)\neq 0$.

<u>Определение 7.5.</u> Точкой разрыва функции называется такая точка, в которой нарушается непрерывность функции.

Пример 7.1.

Найти точки разрыва функции $w(z)=\dfrac{1}{z-1}$.

Решение:

Данная функция $w(z)=\dfrac{1}{z-1}$ терпит разрыв в точке $z=1$, так как при данном значении z знаменатель дроби обращается в нуль, т.е. $z-1=0$.

§ 8. Основные элементарные функции комплексного переменного

8.1. Показательная функция

Показательная функция комплексного переменного $w=e^{z}$ определяется формулой $w=e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$. **(8.1)**

<u>Свойства показательной функции:</u>

1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1 и z_2- произвольные комплексные числа;

2) $e^{z_1-z_2}=\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $\left(e^{z}\right)^{n}=e^{nz}$ $(n\in N)$;

4) $e^{z+2\pi i}=e^{z}$, т.е. $\omega=e^{z}$ является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

Функция $e^{z}\neq 0$, так как $\left|e^{z}\right|=\left|e^{x}(\cos y+i\sin y)\right|=e^{x}$, а $e^{x}\neq 0$.

Если в равенстве ***(8.1)*** $x=0,\ y=\varphi$, то получим формулу Эйлера: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ (см. Глава 1, § 3, п. 3.1).

Пример 8.1.

Найти значение функции $w = e^z$ в точке $z = i\pi$.

Решение:

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 < 0$.

Таким образом, функция e^z не всегда больше нуля, в отличии от функции e^x $\left(e^x > 0\ \forall x\right)$.

8.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция комплексного переменного определяется как функция, обратная показательной.

<u>*Определение 8.1.*</u> *Логарифмом* (*натуральным*) числа $z \neq 0$ называется такое число w, что $e^w = z$.

Обозначение: $w = Ln\,z$.

Логарифмическая функция $w = Ln\,z$ определена на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 0$. Т.о., логарифмы можно находить для произвольных комплексных чисел (т.е. имеет смысл выражение $Ln(-10)$).

Пусть $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $w = u + iv$, тогда равенство $e^w = z$ примет вид

$e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi}$, или $e^u\left(\cos v + i\sin v\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$. **(8.2)**

Из равенства **(8.2)** следует, что $e^u = r,\ v = \varphi + 2\pi k$, т.е.

$u = \ln r,\ v = \varphi + 2\pi k\ \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$. **(8.3)**

Следовательно, функцию $w = Ln\,z$ можно записать так:

$u + iv = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$ или $Ln\,z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$ **(8.4)**

$\left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$, где $r = |z|,\ \varphi = \arg z$,

или $Ln\,z = \ln|z| + i\,Arg\,z$.

Пример 8.2.

Вычислить: а) $Ln(1+i)$; б) $Ln(-5)$.

Решение:

а) $Ln(1+i)=\ln|1+i|+i[\arg(1+i)+2\pi k]=\begin{bmatrix} r=|1+i|=\sqrt{2}, \\ \varphi=\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4} \end{bmatrix}=$

$\ln\sqrt{2}+i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)=\dfrac{1}{2}\ln 2+i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right),\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots.$

Например, при $k=0$ получаем: $Ln(1+i)=\dfrac{1}{2}\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}\approx$

$\approx 0{,}3465+0{,}7854i$;

при $k=1$ получаем: $Ln(1+i)=\dfrac{1}{2}\ln 2+i\dfrac{9\pi}{4}\approx 0{,}3465+7{,}0686i$.

б) $Ln(-5)=\ln|-5|+i[\arg(-5)+2\pi k]=\begin{bmatrix} r=|-5|=5, \\ \varphi=\arg(-5)=\pi \end{bmatrix}=$

$=\ln 5+i(\pi+2\pi k),\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots.$

Например, при $k=0$ получаем: $Ln(-5)=\ln 5+i\pi\approx 1{,}6094+3{,}1416i$;

при $k=1$ получаем: $Ln(-5)=\ln 5+3\pi i\approx 1{,}6094+9{,}4248i$.

Из формулы ***(8.4)*** следует, что логарифмическая функция многозначная, т.е. функция от комплексного числа имеет бесконечное множество значений.

Замечание. В области D можно выделить однозначную ветвь функции, если в каждой точке области выбрать одно из значений многозначной функции таким образом, что полученная однозначная функция непрерывна.

Т.е., при определенном значении k можно выделить однозначную ветвь многозначной функции.

Положим $k=0$ в формуле ***(8.4)***.

<u>Определение 8.2.</u> Однозначную функцию $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, где $0\le\arg z<2\pi$ называют *главным значением функции* $Ln\,z$.

Если z - действительное положительное число, то $\arg z=0$ и $\ln z=\ln|z|$, т.е. главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с натуральным логарифмом этого числа.

<u>Свойства логарифмической функции:</u>

1) $Ln(z_1\cdot z_2)=Ln\,z_1+Ln\,z_2$;

2) $Ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=Ln\,z_1-Ln\,z_2$;

3) $Ln\,z^n=n\,Ln\,z$, где $n\in N$;

4) $Ln\sqrt[n]{z}=\dfrac{1}{n}Ln\,z$, где $n\in N$.

8.3. Степенная функция

Степенная функция определяется равенством

$$w=z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad \textbf{(8.5)}$$

Функция $w=z^n$ - однозначная, если $n\in N$.

Если $n=\dfrac{1}{q}$ $(q\in N)$, то

$$w=z^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{z}=\sqrt[q]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{q}+i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{q}\right), \qquad \textbf{(8.6)}$$

где $k=0,1,2,\dots,q-1$.

Функция $w=z^{\frac{1}{q}}$ - многозначная. Однозначную ветвь этой функции можно получить, придав k определенное значение.

Если $n=\dfrac{p}{q}\ (p,q\in N)$, то

$$w=\left(z^{\frac{1}{q}}\right)^{p}=\sqrt[q]{|z|^{p}}\left(\cos\frac{p(\arg z+2\pi k)}{q}+i\sin\frac{p(\arg z+2\pi k)}{q}\right). \qquad \textbf{(8.7)}$$

Функция $w=z^{\frac{p}{q}}$ - многозначная.

Под степенью с произвольным показателем понимают выражение a^{b}, где $a=\alpha+i\beta,\ b=\gamma+i\eta$ - произвольные комплексные числа.

Степенная функция определяется равенством $w=z^{a}$, где $a=\alpha+i\beta$ - произвольное комплексное число.

Если $w=z^{a}$, то $Ln\,w=aLn\,z\Rightarrow w=e^{aLn\,z}$. **(8.8)**

Функция $w=z^{a}$ - многозначная, определена для всех $z\neq 0$.

Пример 8.3.

Вычислить $(1+i)^{i}$.

Решение:

$$(1+i)^{i}=e^{i\,Ln(1+i)}=\left[Ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right]=e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}=$$

$$=e^{i\ln\sqrt{2}}e^{i^{2}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}\left(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Например, при $k=0$ получаем:

$$(1+i)^{i}\approx e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}\right)=0{,}4559(0{,}9406+0{,}3396i)\approx$$

$$\approx 0{,}4287+0{,}1548i.$$

8.4. Тригонометрические функции

Тригонометрические функции комплексного переменного $z=x+iy$ определяются равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}. \qquad \textbf{(8.9)}$$

Если $y = 0$, то в результате имеем тригонометрические функции действительного переменного x: $\sin x, \cos x, tg\, x, ctg\, x$. Все формулы тригонометрии остаются справедливыми и для тригонометрических функций комплексного переменного.

Тригонометрические функции $\sin z, \cos z$ - периодические с действительным периодом 2π.

$\sin z = 0$ при $z = k\pi \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $\cos z = 0$ при $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т.е. тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют только действительные нули.

8.5. Гиперболические функции

Гиперболические функции определяются равенствами

$$sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad th z = \frac{sh\, z}{ch\, z}, \qquad cth z = \frac{ch\, z}{sh\, z} \qquad \textbf{(8.10)}$$

(читается: $sh\, z$ - гиперболический синус z, $ch\, z$ - гиперболический косинус z, $th z$ - гиперболический тангенс z, $cth z$ - гиперболический котангенс z).

Для действительных значений z составлены таблицы значений этих функций.

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} \cdot \frac{i}{i} = -i\frac{-(e^{z} - e^{-z})}{2} = i\,sh\,z,$$

$$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = ch\,z,$$

$$tg\,iz = \frac{\sin iz}{\cos iz} = \frac{i\,sh\,z}{ch\,z} = i\,th\,z, \qquad \textbf{(8.11)}$$

$$ctg\,iz = \frac{\cos iz}{\sin iz} = \frac{ch\,z}{i\,sh\,z} \cdot \frac{i}{i} = -i\,cth\,z.$$

Гиперболические функции $sh\,z, ch\,z$ периодические с периодом $2\pi i$; функции $th\,z, cth\,z$ имеют период πi .

Пример 8.4.

Найти действительную и мнимую часть функции $f(z) = \cos z.$

Решение:

По формуле ***(8.9)*** находим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix-y} + e^{-ix-y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \right.$$

$$\left. + e^{y}(\cos x - i\sin x)\right) = \frac{1}{2}\left((e^{y} + e^{-y})\cos x - i(e^{y} - e^{-y})\sin x\right) = \cos x \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} -$$

$$- i\sin x \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \cos x \cdot ch\,y - i\sin x \cdot sh\,y.$$

Т.о., $u = \cos x \cdot ch\,y; \quad v(x, y) = -\sin x \cdot sh\,y.$

Пример 8.5.

Вычислить: а) $\cos i$; б) $\sin(1+2i)$.

Решение:

а) $\cos i = \dfrac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \dfrac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e^{1}}{2} = ch1 = 1{,}5431;$

б) $\sin(1+2i) = \dfrac{e^{i(1+2i)} - e^{-i(1+2i)}}{2i} = \dfrac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \dfrac{e^{-2}e^{i} - e^{2}e^{-i}}{2i} =$

$$\frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2i} = \frac{(e^{-2} - e^{2})\cos 1 + i(e^{2} + e^{-2})\sin 1}{2i} =$$

$$= \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \sin 1 + i \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cos 1 = ch2 \sin 1 + i sh2 \cos 1 =$$

$$= 3{,}7622 \cdot 0{,}8415 + i\,3{,}6269 \cdot 0{,}5403 = 3{,}1650 + 1{,}9596i.$$

8.6. Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции комплексного переменного определяются так же, как в курсе тригонометрии.

<u>Определение 8.3.</u> Арксинусом комплексного числа z называют такое комплексное число w, что $\sin w = z$.

Обозначение: $Arc\sin z$.

Из определения $Arc\sin z = w$ следует, что $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$.

Преобразуем данное выражение: $2iz = e^{iw} - \dfrac{1}{e^{iw}}$, или

$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Пусть $e^{iw} = t$, тогда данное выражение примет вид: $t^2 - 2izt - 1 = 0$. Отсюда $t = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ или $e^{iw} = i\,z \pm \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow$

$$w = \frac{1}{i} Ln\left(i\,z \pm \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Окончательно получаем $w = Arc\sin z = -i\,Ln\left(i\,z \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$. **(8.12)**

Функция $w = Arc\sin z$ многозначна.

Функции $w = Arc\cos z,\ w = Arctg\, z,\ w = Arcctg\, z$ определяются аналогично.

$$Arc\cos z = -i\,Ln\left(i\,z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \textbf{(8.13)}$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{i - z}{i + z}\ (z \neq \pm i), \qquad \textbf{(8.14)}$$

$$Arcctg\, z = \frac{i}{2} Ln \frac{z - i}{z + i}\ (z \neq \pm i). \qquad \textbf{(8.15)}$$

Данные функции также многозначны.

Пример 8.6.

Найти $Arc\sin i$.

Решение:

$Arc\sin i = -i\,Ln\left(i\cdot i \pm \sqrt{1-i^2}\right) = -i\,Ln\left(-1 \pm \sqrt{2}\right).$

Поскольку, $-1+\sqrt{2} > 0$, то $\left|-1+\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$, $\arg\left(-1+\sqrt{2}\right) = 0$.

$Arc\sin i = -i\left[\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + i(0+2\pi k)\right] = -i\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\pi k i\right) =,$

$= 2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$-1-\sqrt{2} < 0$, то $\left|-1-\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{2}$, $\arg\left(-1-\sqrt{2}\right) = \pi$.

$Arc\sin i = -i\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + i(\pi + 2\pi k)\right] = \pi + 2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right),$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

§ 9. Дифференцирование функции комплексного переменного.

9.1. Определение производной

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая саму точку. Если комплексному числу $z = x + iy$ дадим приращение Δz, то переменные x и y получат приращения Δx и Δy, причем x перейдет в $x + \Delta x$, y перейдет в $y + \Delta y$, а z перейдет в $z + \Delta z$, тогда функция получит приращение $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

<u>Определение 9.1.</u> *Производной функции* $w = f(z)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимого переменного, при условии, что приращение независимого переменного стремится к нулю, т.е.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad \textbf{(9.1)}$$

В равенстве ***(9.1)*** Δz может произвольным образом стремиться к нулю, т.е. точка $z+\Delta z$ может приближаться к точке z по любому из бесконечного множества различных направлений (рис. 17) (для функции одного действительного переменного точка $x+\Delta x$ приближается к точке x лишь по двум направлениям: слева и справа). Такое стремление точки $z+\Delta z$ к точке z приводит к тому, что даже очень простые функции комплексного переменного могут не иметь производной.

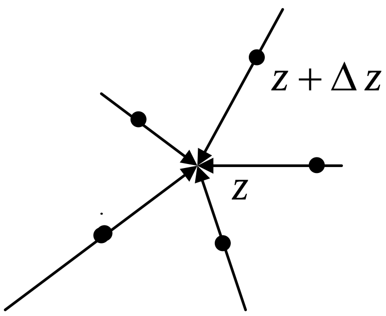


Рис. 17

<u>Теорема 9.1.</u> Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $z=x+iy$, причем в этой точке функции действительных переменных $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ дифференцируемы, то для того чтобы функция $w=f(z)$ имела производную в точке z, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия: $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \textbf{(9.2)}$$

Условия ***(9.2)*** называются *условиями Коши-Римана* (или условиями *Эйлера-Даламбера*). При этом производную $f'(z)$ можно находить по одной из формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y},\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad \textbf{(9.3)}$$

<u>*Определение 9.2.*</u> Функция, имеющая производную в точке z, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Пример 9.1.

Дифференцируемы ли функции: а) $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$; б) $f(z)=y+ix$.

Решение:

а) Находим $u(x,y)=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=3x^2y-y^3$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3-3xy^2\right)'_x=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\left(3x^2y-y^3\right)'_y=3x^2-3y^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3-3xy^2\right)'_y=-6xy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\left(3x^2y-y^3\right)'_x=6xy.$$

Условия ***(9.2)*** выполняются, следовательно, функция дифференцируема. Согласно формулам ***(9.3)***, $f'(z)=3x^2-3y^2+6xyi.$

б) Имеем $u(x,y)=y,\ v(x,y)=x$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(y)'_x=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=(x)'_y=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}=(y)'_y=1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=(x)'_x=1.$$

Одно из условий Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ не выполняется, следовательно, функция не является дифференцируемой.

9.2. Правила дифференцирования функции комплексного переменного. Дифференцирование элементарных функций

Правила дифференцирования и таблица производных функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного.

Теорема 9.2. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в некоторой точке z комплексной плоскости, то верно следующее:

1) $\left(f(z) \pm g(z)\right)' = f'(z) \pm g'(z)$;

2) $\left(f(z) \cdot g(z)\right)' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;

3) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0)$.

Теорема 9.3. Если функция $w = \varphi(z)$ дифференцируема в некоторой точке z_0, а функция $\eta = f(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = \varphi(z_0)$, то сложная функция комплексного переменного $\eta = f(\varphi(z))$ дифференцируема в точке z_0 и ее производная находится по формуле $\left(f(\varphi(z))\right)' = f'_w(w) \cdot \varphi'_z(z)$.

Теорема 9.4. Если в некоторой точке z функция $w = f(z)$ дифференцируема и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причем $\left(f^{-1}(w)\right)' \neq 0$, то $f'(z) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}(w)\right)'}$, где $f^{-1}(w)$ - функция, обратная функции $f(z)$.

Теорема 9.5. (о дифференцируемости основных элементарных функций).

Функции $w = e^z, w = \sin z, w = \cos z, w = sh\, z, w = ch\, z, w = z^n$ $(n \in N)$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости; функции $w = tg\, z$ и $w = th\, z$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости, кроме точек $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $z=\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\cdot i$ соответственно, где $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; для функций $w=Ln\,z,\, w=z^{a}$ в окрестности каждой точки $z\neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является функцией, дифференцируемой в точке z.

§ 10. Аналитическая функция

10.1. Понятие аналитической функции

Определение 10.1. Однозначная функция $w=f(z)$ называется *аналитической в точке* $z\in D$, если она дифференцируема в этой точке и некоторой ее окрестности.

Определение 10.2. Однозначная функция $w=f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке $z\in D$.

Пример 10.1.

Выяснить, является ли аналитической функция $w=z^{3}-2z$.

Решение:

Найдем действительную $\operatorname{Re} w=u$ и мнимую $\operatorname{Im} w=v$ части функции:

$$w=z^{3}-2z=(x+iy)^{3}-2(x+iy)=x^{3}+3x^{2}iy+3x(iy)^{2}+(iy)^{3}-2x-2iy=$$
$$=x^{3}+3x^{2}iy-3xy^{2}-iy^{3}-2x-2iy=x^{3}-3xy^{2}-2x+i\left(3x^{2}y-y^{3}-2y\right).$$

Таким образом, $u=x^{3}-3xy^{2}-2x$, $v=3x^{2}y-y^{3}-2y$. Проверяем условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^{2}-3y^{2}-2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^{2}-3y^{2}-2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\qquad -\frac{\partial v}{\partial x}=-6xy.$$

Условия ***(9.2)*** выполняются во всех точках комплексной плоскости. Функция $w = z^3 - 2z$ дифференцируема, следовательно, является аналитической во всех точках этой плоскости.

Пример 10.2.

Выяснить, является ли аналитической функция $w = z \operatorname{Re} z$.

Решение:

Если $w = z \operatorname{Re} z$, то $w = (x + iy)x = x^2 + ixy$.

Таким образом, $u = \operatorname{Re} w = x^2, v = \operatorname{Im} w = xy$.

Проверяем условия ***(9.2)***:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -y.$$

Условия Коши-Римана выполняются только при $x = 0, y = 0$. Следовательно, функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не является аналитической.

<u>*Определение 10.3.*</u> Точки комплексной плоскости, в которых однозначная функция $w = f(z)$ является аналитической, называются *правильными* точками.

<u>*Определение 10.4.*</u> Точки комплексной плоскости, в которых функция $w = f(z)$ не является аналитической, называются *особыми* точками.

Замечание. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в области D, то аналитическими являются их сумма $f(z) + g(z)$, произведение $f(z) \cdot g(z)$ и частное $\frac{f(z)}{g(z)}$; последнее всюду в области D, где $g(z) \neq 0$.

10.2. Гармоническая функция

Во многих приложениях теории функции комплексного переменного стоит задача нахождения аналитической функции $w = f(z)$ по заданной действительной части $u = u(x, y)$ или мнимой части $v = v(x, y)$. Такая задача имеет решение только тогда, когда функция $u = u(x, y)$ или $v = v(x, y)$ гармонические.

<u>*Определение 10.5*</u>. Однозначная действительная функция двух действительных переменных $\varphi(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она в ней непрерывна, имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad \textbf{(10.1)}$$

Пример 10.3.

Являются ли гармоническими функции: а) $\varphi = x^2 - y^2$; б) $\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Решение:

а) Функция $\varphi = x^2 - y^2$ является непрерывной вместе со своими частными производными до второго порядка включительно для любых значений $x, y \in R$. Найдем частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -2, \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Функция $\varphi = x^2 - y^2$ удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, является гармонической.

б) Функция $\varphi = \dfrac{y}{x}$ терпит разрыв в точке $x = 0$. Проверим, удовлетворяет ли функция уравнению Лапласа, за исключением точки $x = 0$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2y}{x^3} \neq 0.$$

Функция не удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, не является гармонической.

Теорема 10.1. Если функция $f(z) = u + iv$ аналитическая в области D, то ее действительная $u = u(x, y)$ и мнимая части $v = v(x, y)$ являются гармоническими в области D.

Обратное утверждение неверно, так как для аналитичности функции $w = f(z)$ необходимо, чтобы функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ удовлетворяли условиям Коши-Римана.

10.3. Нахождение аналитической функции по заданной ее действительной или мнимой части

Теорема 10.2. По любой заданной гармонической функции $u = u(x, y)$ можно построить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, действительная часть которой u совпадает с заданной функцией $u = u(x, y)$.

Пример 10.4.

Найти аналитическую функцию, у которой действительная часть равна $u = x^2 - y^2 - x$.

Решение:

Функция $u = x^2 - y^2 - x$ является гармонической, так как удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Функция $f(z) = u + iv$ является аналитической, если для функций u и v выполняются условия Коши-Римана:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, то получим:

$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1, \frac{\partial v}{\partial x} = -(-2y) = 2y$.

Из первого уравнения находим:

$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int (2x - 1) dy = 2xy - y + C(x)$ (так как интегрирование проводим по переменной y, то постоянная интегрирования C может быть произвольной функцией от x). Чтобы найти постоянную интегрирования $C(x)$ продифференцируем $v(x, y)$ по x:

$\frac{\partial v}{\partial x} = (2xy - y + C(x))'_x = 2y + C'(x)$ и сравним производную со вторым условием Коши-Римана: $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$. В результате имеем,

$2y + C'(x) = 2y \Rightarrow C'(x) = 0$ или $C(x) = \int 0 dx = C$.

Итак, $v(x, y) = 2xy - y + C$.

Окончательно получаем $f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C)$.

Задача построения аналитической функции по ее мнимой части решается аналогично предыдущей.

<u>Теорема 10.3.</u> По любой заданной гармонической функции $v = v(x, y)$ можно построить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, мнимая часть которой v совпадает с заданной функцией $v = v(x, y)$.

Пример 10.5.

Найти аналитическую функцию, у которой мнимая часть равна $v = 2xy + 3x$.

Решение:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \ \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Функция является гармонической, так как удовлетворяет уравнению Лапласа.

Функция $f(z) = u + iv$ является аналитической, если для функций u и v выполняются условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Из первого условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$ имеем:

$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int 2x dx = x^2 + C(y)$, где $C(y)$ - некоторая произвольная функция, зависящая от y. Чтобы найти ее, используем второе условие Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(2y + 3)$. Так как $u(x, y) = x^2 + C(y)$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = C'(y)$, то $C'(y) = -2y - 3$. Из последнего равенства находим $C(y) = \int (-2y - 3) dy = -y^2 - 3y + C$.

Т.о, имеем $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3y + C$, окончательно получаем

$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - 3y + C + i(2xy + 3x)$.

Замечание. Функцию $f(z)$ восстанавливаем с точностью до постоянной C.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

1-10. Для данной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$, найти действительную часть $u=u(x,y)$ и мнимую часть $v=v(x,y)$.

1. $f(z)=z^3.$
2. $f(z)=\dfrac{1}{z^2}.$
3. $f(z)=z-\dfrac{1}{z}.$
4. $f(z)=z^2-2z+i.$
5. $f(z)=\sin z.$
6. $f(z)=e^{\bar{z}}.$
7. $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}.$
8. $f(z)=z^2+\bar{z}.$
9. $f(z)=(z-i)^2$
10. $f(z)=\dfrac{1+i}{z-i}.$

11-20. Вычислить значение функции $w=f(z)$ в точке z_0.

11. а) $w=\cos z,\quad z_0=5+2i;$ б) $w=e^z,\quad z_0=i\pi.$

12. $w=\sin z,\quad z_0=3-2i;$ б) $w=z^{1-3i},\quad z_0=-1+3i.$

13. $w=e^z,\quad z_0=-2+3i;$ б) $w=Arc\sin z, z_0=\dfrac{1}{2}.$

14. $w=Ln\,z,\quad z_0=-1-i;$ б) $w=e^z,\quad z_0=i-1.$

15. $w=e^{\bar{z}},\quad z_0=1+i;$ б) $w=Arc\cos z, z_0=2.$

16. $w=\dfrac{1}{z^6},\quad z_0=1-\sqrt{3}\,i;$ б) $w=Ln\,z,\quad z_0=4.$

17. $w=sh\,z,\quad z_0=3+4i;$ б) $w=z^{\frac{3}{2}},\quad z_0=-2-2i.$

18. $w=\cos 2z,\quad z_0=1+i;$ б) $w=\dfrac{1}{z^3},\quad z_0=1+i.$

19. $w=ch\,z,\quad z_0=-5+2i;$ б) $w=Ln(z+1), z_0=-i.$

20. $w = Arc\cos z,\ z_0 = 3;$ б) $w = e^{\bar{z}}, \quad z_0 = -4 + 4i.$

21-30. Проверить, дифференцируема ли функция $f(z)$, если да, то найти производную функции.

21. $f(z) = e^{3z}.$

22. $f(z) = \frac{1}{z}.$

23. $f(z) = 5z + z^2.$

24. $f(z) = iz^2 - 3z + 1.$

25. $f(z) = -iz^2 - 2i.$

26. $f(z) = 2z - z^2.$

27. $f(z) = e^{\frac{z}{2}}.$

28. $f(z) = z^2 - 3z.$

29. $f(z) = \sin z.$

30. $f(z) = -3i + z^2.$

31-40. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по заданной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части.

31. $u(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 3x + 3y.$

32. $v(x, y) = 2xy + 3x^2 - 3y^2 + 7.$

33. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy.$

34. $v(x, y) = x^3 - 8xy + 3(x^2 - y^2 - xy^2).$

35. $v(x, y) = 2(y^2 - x^2) - 3y + 3x.$

36. $u(x, y) = 2xy + 3y^2 - 3x^2 + 5y.$

37. $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x.$

38. $u(x, y) = 3xy^2 - x^3 + 7y.$

39. $u(x, y) = 3x^2 y - y^3 - y.$

40. $v(x, y) = 2xy + x^3 - 3xy^2.$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица основных значений тригонометрических функций

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctgx$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Таблица основных значений обратных тригонометрических функций

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\infty$
$arctgx$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$arcctgx$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш.шк., 2006 – Ч.1. – 304 с.

2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 302 с.

3. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – М.: Высш.шк., 1968. – 692 с.

4. Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Интеграл-Пресс, 2006 – Т.1. – 416 с.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2002 – Ч.2. – 288 с.

6. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного. – М.: Просвещение, 1965. – 208 с.

7. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.