СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

1. Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла

Во многих вопросах науки и техники приходится искать не производную, а восстанавливать функцию по известной её производной. Пусть дана функция $f(x)$; требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$: $F'(x)=f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x\in X$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

- *Пример 1*. Найти первообразную для функции $f(x)=x^2$.

Из определения первообразной следует, что функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ является первообразной на промежутке $(-\infty;+\infty)$, так как в каждой точке этого интервала выполнено равенство $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$.

Заметим, что задача отыскания по заданной функции $f(x)$ её первообразной неоднозначна. В качестве первообразной можно было взять следующие функции: $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-10$ или вообще $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$ (где C - *const*), так как $\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$.

Теорема 1. Если в некотором (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) промежутке X функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, также будет первообразной для $f(x)$.

<u>*Определение 2.*</u> Совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad \textbf{(1.1)}$$

При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, $\int$ - знаком интеграла.

<u>*Определение 3*</u>. Операция нахождения первообразной по её производной или неопределённого интеграла по заданной подынтегральной функции называется *интегрированием функции*.

Замечание 1. Операция интегрирования проверяется обратным действием - дифференцированием: для проверки правильности выполнения интегрирования нужно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

- *Пример 2.*

а) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ проверка: $(-\cos x + C)' = \sin x$.

б) $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C;$ проверка: $\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)' = e^{5x}$.

2. Свойства неопределённого интеграла

Из определения неопределённого интеграла непосредственно вытекают следующие свойства:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

3. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$ или $\int dF(x) = F(x) + C.$

4. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)\,dx \;\; (k - const).$

5. $\int \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$.

Замечание 2. Свойство 5 справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

3. Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \; (\alpha \neq -1).$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x - a}{x + a} \right| + C \left(|x| \neq a, a \neq 0 \right).$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C, \; (|x| > \sqrt{|k|}$, при $k < 0)$.

- *Пример 3.*

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \left[\begin{array}{l} \textit{применяем свойства } 4\text{ - }5 \\ \textit{и таблицу основных неопределенных интегралов} \\ \textit{формулы}: \ 2,\ 3,\ 6. \end{array} \right] =$$

$$= \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + 2\cos x + x + C.$$

Замечание 3. Если операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций, то с операцией интегрирования дело обстоит иначе: интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями. Такие интегралы являются «неберущимися».

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1. $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840)).

2. $\int \sin x^2 dx; \quad \int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827)).

3. $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм;

4. $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму;

5. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус;

6. $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус.

§ 2. Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Определение 1. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегрального выражения и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

Некоторые сведения из элементарной алгебры.

1. $x^0 = 1$
2. $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$
3. $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
4. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$
6. $x^m x^n = x^{m+n}$
7. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
8. $(xy)^n = x^n y^n$
9. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
10. $(x^m)^n = x^{mn}$
11. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$
12. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
13. $\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$
14. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

- *Пример 1.*

$$\int \frac{5}{\sqrt{9-4x^2}}dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{9}{4}-x^2\right)}} = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - x^2\right)}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{по формуле } 6 \textit{ таблицы основных} \\ \textit{непределенных интегралов, при } a = \dfrac{3}{2} \end{array}\right] = \frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\frac{3}{2}} + C = \frac{5}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C;$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C\right)' = \frac{5}{2}\left(\arcsin\frac{2x}{3}\right)' + (C)' = \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}\left(\frac{2x}{3}\right)' + 0 =$$

$$=\frac{5}{\sqrt{9-4x^2}}.$$

- *Пример 2.*

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{5}}dx=\left[\begin{array}{l}\textit{по формуле } 3 \textit{ таблицы основных}\\ \textit{неопределенных интегралов}\end{array}\right]=\frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+C=\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+C=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+C;$$

Проверка: $\left(\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+C\right)'=\frac{5}{2}\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'+(C)'=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}+0=x^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}.$

- *Пример 3.*

$$\int\frac{dx}{x^4}=\int x^{-4}dx=\left[\begin{array}{l}\textit{по формуле } 3 \textit{ таблицы основных}\\ \textit{неопределенных интегралов}\end{array}\right]=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=\frac{x^{-3}}{-3}+C=$$

$$=-\frac{1}{3x^3}+C;$$

Проверка: $(-\frac{1}{3x^3}+C)'=-\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+C'=-\frac{1}{3}(-3)x^{-4}+0=\frac{1}{x^4}.$

- *Пример 4.*

$$\int\frac{dx}{x^2+5}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}==\left[\begin{array}{l}\textit{по формуле } 5 \textit{ таблицы основных}\\ \textit{непределенных интегралов, при } a=\sqrt{5}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

- *Пример 5.*

$$\int\frac{x^4-5x^3+1}{x}dx=\int\left(\frac{x^4}{x}-\frac{5x^3}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\begin{array}{l}\textit{применяем свойства } 4; 5\\ \textit{неопределенного интеграла}\end{array}\right]=$$

$$=\int x^3dx-5\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\ln x+C.$$

- *Пример 6.*

$$\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

- *Пример 7.*

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx = [\sin 2x = 2\sin x\cos x] = \int \frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx = 2\int \sin x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{по формуле } 8 \textit{ таблицы основных} \\ \textit{непределенных интегралов} \end{bmatrix} = -2\cos x + C.$$

Проверку для примеров 4 - 7 рекомендуется провести самостоятельно.

2. Метод подстановки (замена переменной)

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Такой приём называется *методом подстановки* или *методом замены переменной.*

<u>Теорема 1</u>. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X - множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула:

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ x'dx = \varphi'(t)dt \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Замечание 1. Замена переменной в неопределённом интеграле чаще производится по формуле:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \begin{bmatrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = t'dt \\ \varphi'(x)dx = dt \end{bmatrix} = \int f(t)dt. \qquad \textbf{(2.2)}$$

При проведении замены переменной в интеграле $\int f(x)dx$ необходимо:

1. выбрать подстановку $\varphi(x)=t$ или замену переменной $x=\varphi(t)$;
2. преобразовать подынтегральную функцию $f(x)$ с учетом выбранной подстановки или замены переменной;
3. найти $dx=\varphi_t'(t)dt$;
4. подставить все в исходный интеграл и вычислить его;
5. вернуться к старой переменной x.

- *Пример 8.*

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x dx=\begin{bmatrix}\sin x=t\\(\sin x)'dx=t'dt\\\cos x dx=dt\end{bmatrix}=\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=$$

$$=\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2}+C=\frac{2\sqrt{(\sin x)^3}}{3}+C.$$

- *Пример 9.*

$$\int x^2\cos\left(x^3\right)dx=\begin{bmatrix}x^3=t\\3x^2dx=dt\\x^2dx=\dfrac{dt}{3}\end{bmatrix}=\int\cos t\,\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int\cos t dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin\left(x^3\right)+C.$$

- *Пример 10.*

$$\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\begin{bmatrix}\ln x=t\\(\ln x)'dx=dt\\\dfrac{dx}{x}=dt\end{bmatrix}=\int t^2dt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C.$$

- *Пример 11.*

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\begin{bmatrix}t=\cos x\\dt=-\sin x dx\\-dt=\sin x dx\end{bmatrix}=\int\frac{-dt}{t}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

- *Пример 12.*

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

- *Пример 13.*

$$\int x(x^2+1)^{3/2} dx. = \begin{bmatrix} t = x^2 + 1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C =$$

$$= \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Замечание 2. Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а a и b - постоянные, причем $a \neq 0$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$:

$$\int f(ax+b)dx = \begin{bmatrix} t = ax + b \\ t'dt = (ax+b)' dx \\ dx = \dfrac{1}{a}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int f(t)dt.$$

- *Пример 14.*

$$\int (2x+1)^{20} dx = [2x+1 = t; \quad dt = 2dx;] = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21} + C = \frac{t^{21}}{42} + C =$$

$$= \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C.$$

3. Метод интегрирования по частям:

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Теорема 2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x)v(x)$

имеет первообразную на этом промежутке. Тогда на промежутке X функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad \textbf{\textit{(2.3)}}$$

Формула (2.3) называется формулой интегрирования по частям в неопределённом интеграле.

Так как $v'(x)dx = dv, u'(x)dx = du$, то её можно записать в виде

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du. \qquad \textbf{\textit{(2.4)}}$$

Метод интегрирования по частям целесообразно применять в тех случаях, когда получающийся в правой части формулы (2.3) (или формулы (2.4)) интеграл проще исходного или подобен ему.

Схема интегрирования по частям предполагает предварительное разбиение подынтегрального выражения на произведение двух сомножителей u и dv. При этом основным критерием правильности разбиения служит то, что интеграл в правой части схемы должен быть проще или, по крайней мере, не сложнее исходного.

Классы функций, интегрируемых по частям:

1. Подынтегральная функция является произведением многочлена и тригонометрической или показательной функции.

$$\int P_n(x) \cdot \sin kx\, dx; \quad \int P_n(x) \cdot \cos kx\, dx;$$
$$\int P_n(x) \cdot e^{kx}\, dx; \quad \int P_n(x) \cdot a^{kx}\, dx,$$

где $P_n(x)$- многочлен n-ой степени; k - число.

В качестве функции $u(x)$ следует взять многочлен $P_n(x)$ и применить к интегралу формулу интегрирования по частям n раз.

- *Пример 15.*

$$\int(2x-1)\cos x dx=\begin{bmatrix} P_1(x)=2x-1,\ n=1 \Rightarrow \text{формулу интегрирования} \\ \text{по частям применяем один раз}: \\ u=2x-1 \quad \Rightarrow \quad du=(2x-1)'dx=2dx \\ dv=\cos x dx \quad \Rightarrow \quad \int dv=\int\cos x dx,\ v=\sin x \end{bmatrix}=$$

$$=(2x-1)\sin x-2\int\sin x dx=(2x-1)\sin x+2\cos x+C.$$

- *Пример 16.*

$$\int x^2e^{3x}dx=\begin{bmatrix} P_n(x)=x^2, n=2 \Rightarrow \text{формулу интегрирования} \\ \text{по частям применяем два раза}: \\ u=x^2 \quad \Rightarrow \quad du=2xdx \\ dv=e^{3x}dx \Rightarrow \int dv=\int e^{3x}dx,\ v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2xdx=$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=\begin{bmatrix} u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx \\ dv=e^{3x}dx \Rightarrow \quad v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C=\frac{1}{27}e^{3x}\left(9x^2-6x+2\right)+C.$$

2. Подынтегральная функция является произведением многочлена и логарифмической функции: $\int P_n(x)\cdot\ln^k xdx,$ где $P_n(x)$ - многочлен n - ой степени; k - число. В качестве функции $u(x)$ следует принять $\ln^k x$ и применить к интегралу k раз формулу интегрирования по частям.

- *Пример 17.*

$$\int\ln^2 xdx=\begin{bmatrix} u=\ln^2 x \Rightarrow du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv=dx \quad \Rightarrow \quad v=x \end{bmatrix}=x\ln^2 x-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\ln x \quad \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx \quad \Rightarrow v=x \end{bmatrix}=x\ln^2 x-2\left(x\ln x-\int dx\right)=x\ln^2 x-2(x\ln x-x)+C.$$

3. Подынтегральная функция является произведением многочлена и обратной тригонометрической функции:

$\int P_n(x)\cdot \arcsin^k \alpha x dx;\quad \int P_n(x)\cdot \arccos^k \alpha x dx;$

$\int P_n(x)\cdot arctg^k \alpha x dx;\quad \int P_n(x)\cdot arcctg^k \alpha x dx,$

где $P_n(x)$- многочлен n-ой степени; k, α - некоторые числа.

В данном случае $dv = P_n(x)dx$, а другие сомножители обозначаем за $u(x)$.

- *Пример 18.*

$$\int arctgxdx = \begin{bmatrix} u = arctgx \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \;\Rightarrow\; v = x \end{bmatrix} = xarctgx - \int x\frac{1}{1+x^2}dx = xarctgx - I$$

$$I = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$\int arctgxdx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

4. Подынтегральная функция есть произведение функций, одна из которых упрощается при дифференцировании, а другая легко интегрируется. В этом случае за $u(x)$ принимается функция, упрощающаяся при дифференцировании.

- *Пример 19.*

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx & \Rightarrow & v = tgx \end{bmatrix} = xtgx - \int tgxdx\ (\text{см. пример } 5\, n.2) =$$

$$= xtgx + \ln|\cos x| + C.$$

5. В некоторых случаях, применяя формулу интегрирования по частям, опять получаем данный интеграл (возвратный). Тогда интеграл определяется из получившегося алгебраического уравнения. К таким интегралам относятся:

а) $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx;\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx,$ где α,β - некоторые числа;

В этом случае применяем дважды формулу интегрирования по частям (причём каждый раз за $u(x)$ принимается только тригонометрическая или только показательная функция), опять получаем данный интеграл.

- *Пример 20.*

$$\int e^{2x}\cos xdx=\begin{bmatrix} u=e^{2x} & \Rightarrow & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos xdx & \Rightarrow & v=\sin x \end{bmatrix}=e^{2x}\sin x-\int\sin x\cdot 2e^{2x}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=e^{2x} & \Rightarrow & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin xdx & \Rightarrow & v=-\cos x \end{bmatrix}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int-\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=$$

$$=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x-4\int e^{2x}\cos xdx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos xdx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

б) некоторые интегралы от сложных функций, например, $\int\cos(\ln x)dx$ также интегрируются по частям дважды;

в) $\int\sqrt{x^2\pm a}dx;\quad \int\sqrt{a-x^2}dx.$

Здесь за $u(x)$ принимается корень, формула интегрирования по частям применяется один раз.

- *Пример 21.*

$$\int\sqrt{x^2+a}dx=\begin{bmatrix} u=\sqrt{x^2+a} \;\Rightarrow\; du=\left(\sqrt{x^2+a}\right)'dx=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx \\ dv=dx \qquad \Rightarrow \;\; v=x \end{bmatrix}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{\left(x^2+a\right)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx+$$

$$+a\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}dx+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Здесь был использован табличный интеграл 13.

Сравнивая начало и конец равенства, получим уравнение

$$2\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+2C,\Rightarrow\int\sqrt{x^2+a}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)+C.$$

§ 3. Интегрирование рациональных дробей

1. Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 1. *Дробно - рациональной функцией* (или *рациональной дробью*) называется выражение вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно.

$$\begin{aligned} P_n(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \\ Q_m(x)&=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0. \end{aligned} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Определение 2. Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется *правильной,* если степень многочлена $P_n(x)$ в ее числителе меньше степени многочлена $Q_m(x)$ в знаменателе, т. е $n<m$.В противном случае (если $m\geq n$) дробь называется *неправильной*.

Всякая неправильная рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду:

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_0(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$, где $P_0(x)$ - многочлен (целая часть при делении), а $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь (остаток).

Например, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{2x^4 - 5x^2 + 6}{x-3}$ - неправильная рациональная дробь.

Разделим числитель на знаменатель «уголком»:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\ 2x^4 \quad -5x^2 \quad +6 & x-2 \\
\cline{2-2}
\underline{2x^4 - 4x^3} & 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 \\
\qquad \_\ 4x^3 - 5x^2 & \\
\qquad \underline{4x^3 - 8x^2} & \\
\qquad\qquad \_\ 3x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{3x^2 - 6x} & \\
\qquad\qquad\qquad \_\ 6x + 6 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{6x - 12} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 18 &
\end{array}
$$

Получили частное $P_0(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$ и остаток $R(x) = 18$:

$$\frac{2x^4 - 5x^2 + 6}{x-3} = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 + \frac{18}{x-3}.$$

2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Правильные рациональные дроби следующих четырех типов называются простейшими дробями:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(n \ge 2, n \in N)$;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geq 2, n\in N)$;

При этом предполагается, что A, B, p, q – действительные числа, а квадратный трехчлен в дробях III и IV типов не имеет действительных корней.

1. Проинтегрируем дробь первого типа:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=\begin{bmatrix}x-a=t\\(x-a)'dx=dt\\dx=dt\end{bmatrix}=A\int\frac{dt}{t}=A\ln|t|+C=A\ln|x-a|+C.$$

- *Пример 1.*

$$\int\frac{4}{x+3}dx=4\int\frac{dx}{x+3}=\begin{bmatrix}x+3=t\\dx=dt\end{bmatrix}=4\int\frac{dt}{t}=4\ln|t|+C=4\ln|x+3|+C.$$

- *Пример 2.*

$$\int\frac{5}{8x-7}dx=5\int\frac{dx}{8x-7}=\begin{bmatrix}8x-7=t\\8dx=dt\\dx=\frac{1}{8}dt\end{bmatrix}=\frac{5}{8}\int\frac{dt}{t}=\frac{5}{8}\ln|t|+C=\frac{5}{8}\ln|8x-7|+C.$$

2. Проинтегрируем дробь второго типа:

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\begin{bmatrix}x-a=t\\(x-a)'dx=dt\\dx=dt\end{bmatrix}=A\int\frac{dt}{t^n}=A\int t^{-n}dt=A\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C=$$

$$=\frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$$

- *Пример 3.*

$$\int\frac{2}{(x-5)^7}dx=2\int\frac{dx}{(x-5)^7}=\begin{bmatrix}x-5=t\\dx=dt\end{bmatrix}=2\int\frac{dt}{t^7}=2\int t^{-7}dt=\frac{2t^{-6}}{-6}+C=-\frac{1}{3(x-5)^6}+C.$$

3. Рассмотрим интеграл: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = I$

1) Убедимся, что данная дробь является простейшей дробью III типа, т. е. $D<0$.

2) Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

3) $I = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx.$

4) Сделаем подстановку: $\left[\begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t \Rightarrow x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{matrix}\right]$,

тогда $I = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+(q-\frac{p^2}{4})}dt.$

Пусть $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, $I = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt = A\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2}.$

5) Для первого интеграла проведем замену: $\left[\begin{matrix} t^2+a^2=z \\ 2tdt=dz \\ tdt=\frac{dz}{2} \end{matrix}\right]$.

Второй получившийся интеграл является табличным.

$$I = A\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\int\frac{dz}{z}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln|z|+$$
$$+(B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C.$$

6) После проведенных обратных преобразований, возвращаясь к первоначальной переменной x, получим:

$$I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

- *Пример 4.*

$$I=\int\frac{x+6}{x^2-2x+17}dx$$

Данная дробь правильная (т.к. $n=1, m=2$).

1) $f(x)=x^2-2x+17$ $D=(-2)^2-4\cdot17=-64<0,\Rightarrow$ простейшая, III типа.

2) Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2-2x+17=x^2-2\cdot x\cdot1+1^2+17-1=(x-1)^2+16=(x-1)^2+4^2.$$

3) $I=\int\frac{x+6}{x^2-2x+17}dx=\int\frac{x+6}{(x-1)^2+4^2}dx.$

4) Сделаем подстановку: $\begin{bmatrix}x-1=t\\ x=t+1\\ dx=dt\end{bmatrix}$, тогда:

$$I=\int\frac{x+6}{x^2-2x+17}dx=\int\frac{x+6}{(x-1)^2+4^2}dx=\int\frac{t+1+6}{t^2+4^2}dt=\int\frac{t+7}{t^2+4^2}dt$$

5) Получившийся интеграл разобьем на два интеграла:

$$I=\int\frac{t+7}{t^2+4^2}dt=\int\frac{t}{t^2+4^2}dt+7\int\frac{dt}{t^2+4^2}=I_1+I_2$$

$$I_1=\int\frac{t}{t^2+4^2}=\begin{bmatrix}t^2+4^2=z\\ 2tdt=dz\\ tdt=\frac{dz}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4^2\right|;$$

$$I_2=7\int\frac{dt}{t^2+4^2}=\frac{7}{4}arctg\frac{t}{4};$$

6) Возвращаясь к первоначальной переменной x, получим:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+4^2\right|+\frac{7}{4}arctg\frac{t}{4}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+17\right|+\frac{7}{4}arctg\frac{x-1}{4}+C.$$

Замечание 1. Если у трехчлена $x^2 + px + q$ $D > 0$, то дробь по определению не является простейшей, однако ее можно интегрировать указанным выше способом.

4. Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

1) Сначала рассмотрим частный случай при $A = 0,\ B = 1$. Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{dt}{(t^2 + z)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{dt}{(t^2 + z)^n} = \frac{1}{z}\int \frac{z + t^2 - t^2}{(t^2 + z)^n}dt = \frac{1}{z}\int \frac{dt}{(t^2 + z)^{n-1}} - \frac{1}{z}\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + z)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\begin{bmatrix} t = u & \Rightarrow\ dt = du \\ dv = \dfrac{tdt}{(t^2 + z)^n} & \Rightarrow\ v = \displaystyle\int \frac{tdt}{(t^2 + z)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2 + z)^{n-1}} \end{bmatrix}$

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + z)^n} = -\frac{t}{(2n-2)(t^2 + z)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dt}{(t^2 + z)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{dt}{(t^2 + z)^n} = \frac{1}{z}\int \frac{dt}{(t^2 + z)^{n-1}} + \frac{t}{z(2n-2)(t^2 + z)^{n-1}} - \frac{1}{z(2n-2)}\int \frac{dt}{(t^2 + z)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2 + z)^n} = \frac{t}{z(2n-2)(t^2 + z)^{n-1}} + \frac{2n-3}{z(2n-2)}\int \frac{dt}{(t^2 + z)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется рекуррентной. Если применить ее $n-1$ раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{dt}{t^2 + z}$.

2) Вернемся теперь к интегралу от простейшей дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Ax+B}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \begin{bmatrix} t = 2ax+b; & dt = 2adx \\ x = \dfrac{t-b}{2a}; & z = 4ac-b^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\dfrac{A(t-b)}{2a}+B}{(t^2+z)^n}dt = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{A}{2a}\int \frac{tdt}{(t^2+z)^n} + \frac{2aB-Ab}{2a}\int \frac{dt}{(t^2+z)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $s = t^2 + z$ приводится к табличному $\int \frac{ds}{s^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n.

- *Пример 5.*

$$I = \int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \begin{bmatrix} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{3t+6+5}{(t^2+3)^2}du =$$

$$= \int \frac{3t}{(t^2+3)^2} + \int \frac{11}{(t^2+3)^2} = I_1 + I_2;$$

$$I_1 = 3\int \frac{tdt}{(t^2+3)^2} = \begin{bmatrix} s = t^2+3 \\ ds = 2tdt \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{ds}{s^2} = -\frac{3}{2s} = -\frac{3}{2\left(t^2+3\right)};$$

$$I_2 = 11\int \frac{dt}{(t^2+3)^2} = 11\left[\frac{t}{3\cdot 2(t^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{dt}{t^2+3}\right] = \frac{11t}{6(t^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}};$$

$$I = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

3. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби

Теорема 1. Пусть

$$P_n\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$Q_m\left(x\right) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Всякая правильная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ может быть разложена на сумму «простейших» дробей, вид которых зависит от типов множителей, входящих в разложение знаменателя.

- *Пример 6*. Найти сумму простейших дробей: $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x+1}$

$$\frac{2^{x+1/}}{x}+\frac{3^{x/}}{x+1}=\frac{2(x+1)+3x}{x(x+1)}=\frac{5x+2}{x(x+1)}$$

Следствие 1. Если знаменатель имеет простые вещественные корни $x_1, x_2, ...,x_m$, тогда многочлен $Q(x)$ можно представить в виде:

$Q_m(x)=(x-x_1)(x-x_2)........(x-x_m)$, и разложение дроби на простейшие запишется:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots\ldots+\frac{A_m}{x-x_m}.$$

Следствие 2. Если знаменатель дроби имеет простые вещественные корни $x_1, x_2, ...,x_s$ кратности $k_1, k_2, ...,k_s$ соответственно, тогда многочлен $Q(x)$ можно представить в виде:

$Q_m(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}........(x-x_n)^{k_s}$, и разложение дроби будет:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{K_1}{x-x_s}+\frac{K_2}{(x-x_s)^2}+\ldots+\frac{K_{k_s}}{(x-x_s)^{k_s}}$$

Следствие 3. Если дискриминант знаменателя отрицателен (D<0), тогда многочлен $Q_m(x)$ может быть представлен в виде:

$Q_m(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\cdots(x^2+p_sx+q_s)$, и разложение дроби на простейшие примет вид:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots\ldots+\frac{A_sx+B_s}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Замечание 2. Коэффициенты *A, B*…в полученных разложениях находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений.

В результате интегрирование рациональной дроби сводится к нахождению интегралов от простейших рациональных дробей.

<u>Некоторые сведения из элементарной алгебры.</u>

1) Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2) Квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0 \quad D = b^2 - 4ac$

Если D>0, то уравнение имеет два действительных корня. $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Если D=0, то уравнение имеет два равных действительных корня.

$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Если *D<0*, то уравнение не имеет действительных корней.

- *Пример 7*. Найти неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} dx$$

(Знаменатель имеет только действительные различные корни)

1) Подынтегральная функция - неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{}\,x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9 & x^3+2x^2-3x \\ \cline{2-2}
\underline{x^5+2x^4-3x^3} & x^2+1 \\
\qquad\qquad \underline{}\,x^3+5x^2-7x & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{x^3+2x^2-3x} & \\
\qquad\qquad\qquad 3x^2-4x+9 &
\end{array}
$$

$$I=\int\left(x^2+1\right)dx+\int\frac{3x^2-4x+9}{(x+3)(x-1)x}.$$

2) Т. к. знаменатель последней дроби имеет три различных вещественных корня $x=-3,\quad x=1,\quad x=0$, то ее разложение на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{3x^2-4x+9}{(x+3)(x-1)x}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x}.$$

Приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества, чтобы найти коэффициенты *A, B, C.*

$$\frac{3x^2-4x+9}{(x+3)(x-1)x}=\frac{A^{\;x(x-1)/}}{x+3}+\frac{B^{\;x(x+3)/}}{x-1}+\frac{C^{\;(x+3)(x-1)/}}{x};$$

$$\frac{3x^2-4x+9}{(x+3)(x-1)x}=\frac{A(x-1)x+B(x+3)x+C(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)x};$$

$$3x^2-4x+9=Ax^2-Ax+Bx^2+3Bx+Cx^2+2Cx-3C;$$

$$3x^2-4x+9=(A+B+C)x^2+(-A+3B+2C)x+(-3C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$
\begin{array}{l|}
x^2 \\ x^1 \\ x^0
\end{array}
\begin{cases}
A+B+C=3 \\
-A+3B+2C=-4 \\
-3C=9
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
A+B=6 \\
-A+3B=2 \\
C=-3
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
A=4 \\
B=2 \\
C=-3
\end{cases}
$$

3) Следовательно, подынтегральное выражение имеет вид:

$$\frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}=x^2+1+\frac{4}{x+3}+\frac{2}{x-1}+\frac{-3}{x}$$

4) Интегрируем целую часть и полученные простейшие дроби, используя табличные интегралы и интегралы от простейших дробей:

$$I=\int (x^2+1)dx+\int \frac{4}{x+3}dx+\int \frac{2}{x-1}dx+\int \frac{-3}{x}dx=\int x^2dx+\int dx+4\int \frac{dx}{x+3}+$$
$$+2\int \frac{dx}{x-1}-3\int \frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}+x+4\ln|x+3|++2\ln|x-1|-3\ln|x|+C.$$

- *Пример 8*. Найти неопределенный интеграл.

$$I=\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x+2)^3(x-1)}dx$$

(Знаменатель имеет лишь действительные корни, причем некоторые из них повторяются).

1) Подынтегральная функция - правильная рациональная дробь.

2) Разложим ее на элементарные дроби. Так как знаменатель имеет два действительных корня: $x_1=1$, кратности единица и $x_2=-2$ кратности три, то разложение на элементарные дроби имеет вид:

$$\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x+2)^3(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+\frac{B_3}{(x+2)^3}.$$

3) Чтобы найти коэффициенты $A, B_1, B_2, B_3,$ приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества:

$$\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x+2)^3(x-1)}=\frac{A^{(x+2)^3/}}{x-1}+\frac{B_1^{(x-1)(c+2)^2/}}{x+2}+\frac{B_2^{(x-1)(x+2)/}}{(x+2)^2}+\frac{B_3^{x-1/}}{(x+2)^3};$$

$$\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x+2)^3(x-1)}=\frac{A(x+2)^3+B_1(x-1)(x+2)^2+B_2(x-1)(x+2)+B_3(x-1)}{(x+2)^3(x-1)};$$

$$x^3+6x^2+10x+10=A(x+2)^3+B_1(x-1)(x+2)^2+B_2(x-1)(x+2)+B_3(x-1)$$

$$x^3+6x^2+10x+10=x^3(A+B_1)+x^2(6A+3B_1+B_2)+x(12A+B_2+B_3)+$$
$$+(8A-4B_1-2B_2-B_3).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{l|} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\begin{cases} A+B_1=1 \\ 6A+3B_1+B_2=6 \\ 12A+B_2+B_3=10 \\ 8A-4B_1-2B_2-B_3=10 \end{cases}\qquad \begin{cases} A=1-B_1 \\ -3B_1+B_2=0 \\ -12B_1+B_2+B_3=-2 \\ -12B_1-2B_2-B_3=2 \end{cases}\qquad \begin{cases} A=1-B_1 \\ B_2=3B_1 \\ -9B_1+B_3=-2 \\ -18B_1-B_3=2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=1,\quad B_1=0,\quad B_2=0,\quad B_3=-2.$$

Следовательно, подынтегральное выражение имеет вид:

$$\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x+2)^3(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x+2)^3};$$

4) Интегрируем сумму элементарных дробей, используя табличные интегралы:

$$I=\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{(x+2)^3}=\ln|x-1|+\frac{1}{(x+2)^2}+C.$$

- *Пример 9*. Найти неопределенный интеграл.

$$I=\int\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$$

1) Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь.

2) Разложение на элементарные дроби имеет вид: (следствия 2 – 3) $\dfrac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A_1}{x+1}+\dfrac{A_2}{(x+1)^2}+\dfrac{Bx+C}{(x^2+1)}.$

4) Чтобы найти коэффициенты A_1, A_2, B, C, приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества:

$$\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1^{\,(x+1)(x^2+1)/}}{x+1}+\frac{A_2^{\,x^2+1/}}{(x+1)^2}+\frac{(Bx+C)^{\,x+1/}}{(x^2+1)};$$

$$\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1(x^2+1)(x+1)+A_2(x^2+1)(Bx+C)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)};$$

$$x^3+4x^2+3x+2=A_1(x^2+1)(x+1)+A_2(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)^2;$$
$$x^3+4x^2+3x+2=x^3(A_1+B)+x^2(A_1+A_2+2B+C)+x(A_1+B+2C)+(A_1+A_2+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} A_1+B=1 \\ A_1+A_2+2B+C=4 \\ A_1+B+2C=3 \\ A_1+A_2+C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1-A_1 \\ C=2-A_1-A_2 \\ A_1+A_2+2(1-A_1)+2-A_1-A_2=4 \\ A_1+1-A_1+2(2-A_1-A_2)=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} B=1-A_1 \\ C=2-A_1-A_2 \\ -2A_1=0 \\ -2A_1-2A_2=-2 \end{cases} \Rightarrow A_1=0 \quad A_2=1 \quad B=1 \quad C=1$$

Следовательно, подынтегральное выражение имеет вид:

$$\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}.$$

4) Интегрируем сумму полученных простейших дробей

$$\int\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{x+1}{(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+arctgx+C.$$

- *Пример 10*. Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx=I$$

1) Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь.

2) Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то разложение на простейшие дроби имеет вид (следствия 1, 3):

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

3) Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+$$
$$+(-16A-8B+8D)=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{array}{c|} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

4) Интегрируем сумму полученных простейших дробей:

$$I=\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+$$
$$+\int\frac{2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

§ 4. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Определение 1. Выражение $R(\sin x,\cos x)$, получающееся из функций $\sin x,\cos x$, некоторых *const* с помощью арифметических действий, называется рациональной функций от синуса и косинуса.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводятся к интегралу от рациональной дроби при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$$\left[\begin{array}{lll} t = tg\dfrac{x}{2}; & x = 2arctgt; & \sin x = \dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = (2arctgt)'\,dt = \dfrac{2dt}{1+t^2}4; & & \cos x = \dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] \qquad \textbf{\textit{(4.1)}}$$

Замечание 1. Подстановка (4.1) позволяет найти любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, но зачастую приводит к достаточно громоздким вычислениям. Наиболее удобно подстановку (4.1) использовать для интегралов вида $\int \dfrac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$.

- *Пример 1.*

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left[\begin{array}{l} t = tg\dfrac{x}{2} \\ x = 2arctgt \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{(1-t^2)}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left[\dfrac{8t+3-3t^2+5+5t^2}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \textit{получили простейшую} \\ \textit{дробь II типа} \end{array}\right] = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\dfrac{x}{2}+2} + C.$$

Замечание 2. Иногда быстрее позволяют вычислить $\int R(\sin x, \cos x)dx$ подстановки вида: $\sin x = t, \quad \cos x = t, \quad tgx = t.$

- *Пример 2.*

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + 3\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 3\right)}dx = \int \frac{tgx}{tgx + 3}dx = \begin{bmatrix} tgx = t \\ x = arctgt \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{t}{(t+3)(1+t^2)}dt = I;$$

1) Подынтегральная функция - правильная рациональная дробь.

2) Разложим ее на простейшие дроби. Разложение имеет вид (см. §4, следствия 1, 3):

$$\frac{t}{(t+3)(t^2+1)} = \frac{A}{t+3} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

3) Чтобы найти коэффициенты A, B, C, приводим к общему знаменателю дроби в правой части тождества:

$$\frac{t}{(t+3)(t^2+1)} = \frac{A(t^2+1) + (Bt+C)(t+3)}{(t+3)(t^2+1)}$$

$$t = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+3)$$

$$t = t^2(A+B) + t(3B+C) + (A+3C)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{array}{c|} t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ C+3B=1 \\ A+3C=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ C+3B=1 \\ -B+3C=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ C=1-3B \\ -B+3(1-3B)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{3}{10} \\ B=\frac{3}{10} \\ C=\frac{1}{10} \end{cases}$$

4) Интегрируем сумму простейших дробей

$$I=-\frac{3}{10}\int\frac{dt}{t+3}+\frac{1}{10}\int\frac{3t+1}{1+t^2}dt=-\frac{3}{10}\int\frac{dt}{t+3}+\frac{3}{10}\int\frac{t}{1+t^2}dt+\frac{1}{10}\int\frac{1}{1+t^2}dt=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=-\int\frac{dt}{t+3}=-\frac{3}{10}\ln|t+3|=\frac{3}{10}\ln|tgx+3|;$$

$$I_2=\frac{3}{10}\int\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{3}{20}\ln\left|1+t^2\right|=\frac{3}{20}\ln\left|1+tg^2x\right|;$$

$$I_3=\frac{1}{10}\int\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{10}arctgt+C=\frac{1}{10}arctg(tgx)=\frac{1}{10}x;$$

$$I=\frac{3}{10}\ln|tgx+3|+\frac{3}{20}\ln\left|1+tg^2x\right|+\frac{1}{10}x+C.$$

Замечание 3. В тех случаях, когда в интегрируемое выражение $\sin x, \cos x$ входят в четных степенях, удобной оказывается подстановка:

$$\begin{bmatrix} t=tgx \qquad x=arctgt \\ dx=(arctgt)'\,dt=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x=\dfrac{tg^2x}{1+tg^2x}=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+tg^2x}=\dfrac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{\textit{(4.2)}}$$

- *Пример 3.*

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\begin{bmatrix} t=tgx \qquad x=arctgt \\ dx=(arctgt)'\,dt=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+tg^2x}=\dfrac{1}{1+t^2} \end{bmatrix}==\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{2+t^2}=$$

$$=\begin{bmatrix} \textit{получили табличный} \\ \textit{интеграл} \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C.$$

2. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

1. Функция R является нечетной относительно $\cos x$

Подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $\sin x = t$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos x$ только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x) \cos x dx = \int r(t)dt.$$

- *Пример 4.*

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \begin{bmatrix} R(\sin x,\ \cos\mathrm{x}) = \dfrac{\cos^7 x}{\sin^4 x} \\ \dfrac{(-\cos x)^7}{\sin^4 x} = -\dfrac{\cos^7 x}{\sin^4 x} = -R(\sin x,\ \cos\mathrm{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} + 3\int dt - \int t^2 dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Замечание 4. Для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию, может быть любой, как целой, так и дробной.

2. Функция R является нечетной относительно $\sin x$

Подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $\cos x = t$. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

- *Пример 5.*

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \begin{bmatrix} R(\sin x,\ \cos x) = \sin^3 x \cos^2 \\ (-\sin x)^3 \cos^2 x = -\sin^3 x \cos^2 x = -R(\sin x,\ \cos x) \\ \sin^3 x = \sin^2 x \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x dx = \begin{bmatrix} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{bmatrix} =$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \cos^2 x dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{bmatrix} = -\int (1 - t^2) t^2 dt = -\int (t^2 - t^4) dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

- *Пример 6.*

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1 - t^2}{2 + t} dt = \begin{bmatrix} \textit{получили неправильную} \\ \textit{рациональную дробь;} \\ \textit{выделим целую часть} \end{bmatrix};$$

$$\left[\begin{array}{r|l} -\ t^2 - 1 & t + 2 \\ \cline{2-2} \underline{t^2 + 2t} & t - 2 \\ -\ -2t - 1 & \\ \underline{-2t - 4} & \\ 3 & \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$I = \int (t - 2)dt + 3\int \frac{dt}{t + 2} = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t + 2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C.$$

3. Функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$

Подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ не меняется при перемене знаков у $\sin x$ и $\cos x$ одновременно: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Для преобразования функции R в рациональную дробь используется подстановка $tg\,x=t$ или. $ctg\,x=t.$ Тогда

$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(t)dt$.

- *Пример 7.*

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}=$$

$$=\begin{bmatrix} R(\sin x,\ \cos x)=\dfrac{1}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x} \\ R(-\sin x,\ -\cos x)=\dfrac{1}{(-\sin x)^2+6(-\sin x)(-\cos x)-16(-\cos x)^2} \\ R(-\sin x,\ \ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x) \\ \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x+6tgx-16}dx=\begin{bmatrix} tgx=t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx=d(tgx)=dt \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+6t-16}=\int\frac{dt}{(t+3)^2-25}=\begin{bmatrix} z=t+3 \\ dz=dt \end{bmatrix}=\int\frac{dz}{z^2+25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{z-5}{z+3}\right|=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{t+3-5}{t+3+5}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right|+C.$$

- *Пример 8.*

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx=\begin{bmatrix} \sin^5 x=\sin^3 x\sin^2 x \\ \dfrac{\cos x}{\sin x}=ctgx \end{bmatrix}=\int\frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}dx=\begin{bmatrix} ctgx=t \\ -\dfrac{dx}{\sin^2 x}=dt \end{bmatrix}=$$

$$=-\int t^3dt=-\frac{t^4}{4}+C=-\frac{1}{4}ctg^4 x+C.$$

4. Подынтегральная функция представляет собой произведение четных степеней $\sin\,x$ и $\cos\,x$, то есть интеграл имеет вид $\int\sin^{2n}x\cos^{2m}xdx,$ где $n=0,\,1,\,2,\,...,\quad m=0,\,1,\,2,\,...,$ то она упрощается с помощью тригонометрических формул:

1. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

2. $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$;

3. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin^2 x = 1 - cos^2 x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

- *Пример 9.*

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

- *Пример 10.*

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \begin{bmatrix} \sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2} \\ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \end{bmatrix} = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$\frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. Интегралы вида: $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x\right)$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x\right)$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x\right)$$

- *Пример 11.*

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos 9x) dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

- *Пример 12*

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx = \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = .$$
$$= -\frac{1}{84}\cos 21x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x - \frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

4. Интегралы вида $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$

Для интегралов данного типа удобно выделить множитель $tg^2 x$, $ctg^2 x$ и воспользоваться формулами:

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1;$$
$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

- *Пример 13*.

$$I = \int tg^3 x dx = \int tg^2 x tgx dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) tgx dx = \int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx - \int tgx dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} tgx = t \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt \end{bmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}tg^2 x;$$

$$I_2 = \int tgx dx = \begin{bmatrix} tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cos x = z \\ -\sin x dx = dz \end{bmatrix} = -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z| = -\ln|\cos x|;$$

$$I = \frac{1}{2}tg^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

§ 5. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $\begin{bmatrix} x+\dfrac{b}{2a}=t \\ dx=dt \end{bmatrix}$, интегралы указанного типа можно привести к интегралам вида: $\int R\left(t,\sqrt{a^2-t^2}\right)dt$, $\int R\left(t,\sqrt{t^2-a^2}\right)dt$, $\int R\left(t,\sqrt{a^2+t^2}\right)dt$. Эти интегралы можно легко вычислить с помощью соответствующих подстановок.

1.

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\begin{bmatrix} x=a\sin t \ \ (x=a\cos t) \\ dx=a\cos t dt \\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int R(\sin t,\cos t)dt.$$

2.

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=$$

$$=\begin{bmatrix} x=\dfrac{a}{\cos t} \quad \left(x=\dfrac{a}{\sin t}\right) \\ dx=a\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=\sqrt{a^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}-1\right)}=\sqrt{a^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}-\dfrac{\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)}= \\ =\sqrt{a^2\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=a\dfrac{\sin t}{\cos t} \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int R(\sin t,\cos t)dt.$$

3.

$$3)\ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left[\begin{array}{l} x=tgt\quad (x=ctgt) \\ dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=\sqrt{a^2\left(1+tg^2t\right)}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2 t}}=\dfrac{a}{\cos t} \end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int R(\sin t,\cos t)dt.$$

- *Пример 1.*

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\left[\begin{array}{l} 2\ mun,\ a=3 \\ x=\dfrac{3}{\sin t},\quad \sin t=\dfrac{3}{x} \\ dx=-\dfrac{3\cos t}{\sin^2 t}dt \end{array}\right]=\int\frac{\dfrac{-3\cos t}{\sin^2 t}dt}{\dfrac{9}{\sin^2 t}\left(\sqrt{\dfrac{9}{\sin^2 t}-9}\right)}=-\frac{1}{9}\int\sin t\,dt=$$

$$=\frac{1}{9}\cos t+C=\left[\begin{array}{l} \sin t=\dfrac{3}{x},\quad \sin^2 t=\dfrac{9}{x^2} \\ \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}, \\ \cos t=\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}} \\ \cos t=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} \end{array}\right]=\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C.$$

2. Дробно - линейные иррациональности

1. Интегралы вида: $\int R\left(x,x^{\frac{m_1}{n_1}},x^{\frac{m_2}{n_2}},.....,x^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx$, где $\dfrac{m_1}{n_1},\ \dfrac{m_2}{n_2},.....,\dfrac{m_s}{n_s}\in Q$,

путем подстановки $\left[\begin{array}{l} x=t^k,\ где\ k\text{ - }НОК\ (n_1,\ n_2,....,n_s) \\ dx=kt^{k-1}dt \end{array}\right]$ сводятся к интегралам от рациональной функции.

- *Пример 2.*

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \begin{bmatrix} HOK(2,3)=6 \\ x=t^6 \quad t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5dt \end{bmatrix} = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}dt = I$$

1) Получили неправильную рациональную дробь. Выделим целую часть.

$$\left[\begin{array}{l|l} \underline{-}\,t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^8+t^6} & t^6-t^4+t^2-1 \\ \quad \underline{-}-t^6 & \\ \quad \underline{-t^6-t^4} & \\ \qquad \underline{-}\,t^4 & \\ \qquad \underline{t^4+t^2} & \\ \qquad\quad \underline{-}-t^2 & \\ \qquad\quad \underline{-t^2-t} & \\ \qquad\qquad t & \end{array}\right]$$

2) $I = 6\int\left(t^6-t^4+t^2-1\right)dt + 6\int\frac{t}{t^2+1}dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + \frac{6}{2}\ln\left|t^2+1\right| + C =$

$= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + C.$

2. Интегралы вида: $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., (ax+b)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)$, где

$\frac{m_1}{n_1},\ \frac{m_2}{n_2}, ...,\frac{m_s}{n_s} \in Q,$ путем подстановки

$\begin{bmatrix} ax+b=t^k,\ где\ k\text{ - }HOK\ (n_1,\ n_2,....,n_s) \\ dx=\frac{k}{a}t^{k-1}dt \end{bmatrix}$ сводятся к интегралам от рациональной функции.

- *Пример 3.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \begin{bmatrix} НОК(2,4)=4 \\ 1-2x=t^4 \\ -2dx=4t^3dt \\ dx=-2t^3dt \end{bmatrix} = \int \frac{-2t^3dt}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2dt}{t-1} = -2\int\left(t+\frac{t}{t-1}\right)dt =$$

$$= -2\int tdt - 2\int \frac{t}{t-1}dt = -t^2 - 2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right| + C.$$

3. Интегралы вида:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \text{где} \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \ldots\ldots, \frac{m_s}{n_s} \in Q$$

Путем подстановки $\left\{\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \textit{ где } k \textit{ - НОК } (n_1,\, n_2, \ldots, n_s)\right\}$ сводятся к интегралам от рациональной функции.

3. Квадратичные иррациональности

1. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Такие интегралы путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам (см. §4).

- *Пример 4.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \begin{bmatrix} x^2+2x+5=(x+1)^2+4 \\ x+1=t \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{(x+p)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Путем подстановки $\left[\begin{matrix} x+p=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{matrix}\right]$ сводятся к интегралам от рациональной функции.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1.

1-10. Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-3}}$; б) $\int \frac{3arctg^2 x}{x^2+1}dx$; в) $\int arcctg\sqrt{5x-1}\,dx$.

2. а) $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{x}{(x^2+4)^6}dx$; в) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

3. а) $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{4-25x^2}}$; б) $\int e^{2-x^3}x^2dx$; в) $\int \ln(1-x)dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{9x^2-3}$; б) $\int \frac{3tg^2 x}{\cos^2 x}dx$; в) $\int (4-3x)e^{-3x}dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{4x^2+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$; в) $\int (4-15x)\cos 3x\,dx$.

6. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$ б) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$; в) $\int x\ln(x+2)dx$.

7. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$; б) $\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx$; в) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$.

8. а) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; в) $\int (7x-10)\cos 4x\,dx$.

9. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-25x^2}}$; б) $\int \frac{5\arccos^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int (5x-2)e^{3x}dx$.

10. а) $\int \frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^3+3}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$; в) $\int (7x-10)\sin 4x\,dx$.

11 – 20 Найти неопределенные интегралы.

11. а) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x^2-3x)}dx$; б) $\int \frac{3x-7}{x^2+x+1}dx$.

12. а) $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x^2-4)(x-1)}dx$; б) $\int \frac{7x+3}{2x^2+4x+9}dx$.

13. *а)* $\int \frac{x^3-17}{x^2+4x+3}dx;$ *б)* $\int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx.$

14. *а)* $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx;$ *б)* $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx.$

15. *а)* $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx;$ *б)* $\int \frac{x-7}{x^2-10x+9}dx.$

16. *а)* $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx;$ *б)* $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$

17. *а)* $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx;$ *б)* $\int \frac{3x+9}{x^2-6x+12}dx.$

18. *а)* $\int \frac{4x^3+x^2+2}{(x^2-x)(x-2)}dx;$ *б)* $\int \frac{8x-11}{\sqrt{x^2-2x-5}}dx.$

19. *а)* $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx;$ *б)* $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+18}}dx.$

20. *а)* $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx;$ *б)* $\int \frac{x-2}{x^2-8x+7}dx.$

21 – 30. Найти неопределенные интегралы.

21. *а)* $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx;$ *б)* $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx;$ *в)* $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x dx.$

22. *а)* $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx;$ *б)* $\int \frac{dx}{4+3\cos x-4\sin x};$ *в)* $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx.$

23. *а)* $\int \frac{\sqrt{x}}{x+10}dx;$ *б)* $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx;$ *в)* $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx.$

24. *а)* $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}};$ *б)* $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x};$ *в)* $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^2 x}}dx.$

25. *а)* $\int \frac{dx}{3x-4\sqrt{x}};$ *б)* $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx;$ *в)* $\int \cos^4 3x\sin^2 3x dx.$

26. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}$; *б*) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; *в*) $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$.

27. *а*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; *б*) $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$; *в*) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx$.

28. *а*) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}} dx$; *б*) $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x} dx$; *в*) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cos^3 x dx$.

29. *а*) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; *б*) $\int \frac{dx}{5+3\cos x+2\sin x}$; *в*) $\int \cos^4 \frac{3x}{4} \sin^2 \frac{3x}{4} dx$.

30. *а*) $\int \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}-1} dx$; *б*) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$; *в*) $\int \cos\frac{5x}{2} \cos\frac{x}{2} dx$.

<u>ГЛАВА 3.</u> ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определённый интеграл

1. Определение определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $a < b$. Разобьём этот отрезок на n произвольных частей точками:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.

Точки $x_{0,}\ x_1, \ldots, x_n$ будем называть точками разбиения.

Выберем в каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку $\xi_i \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$, $0 \le i \le n$. Длину частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ обозначим через Δx_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Образуем сумму произведений:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad \textbf{\textit{(1.1)}}$$

Сумму (1.1) будем называть интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответствующей этому разбиению.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$.

По-разному выполняя разбиение отрезка $[a,b]$ на n частичных отрезков и по-разному выбирая в каждом из них точку ξ_i, можно для любой функции $f(x)$ и заданного отрезка $[a,b]$ составить бесконечное множество различных интегральных сумм. При этом может оказаться, что все эти различные интегральные суммы при $n \to \infty$ и при $\lambda \to 0$, имеют один общий предел.

<u>Определение 1.</u> Если существует конечный предел I интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $\lambda \to 0$, то этот предел называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad \textbf{(1.2)}$$

или $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

<u>Определение 2</u>. Функция $f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определённый интеграл, называется *интегрируемой* на этом отрезке. Числа a и b - соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ - подынтегральной функцией, x - переменной интегрирования.

Замечание 1. Величина определённого интеграла, согласно данному определению, однозначно определяется видом функции $f(x)$ и числами a и b. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$.

2. Условия существования определённого интеграла

1. Необходимое условие интегрируемости функции:

<u>Теорема 1.</u> Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Замечание 1. Обратная теорема неверна, т.е. условие ограниченности функции $f(x)$ необходимое, но не достаточное условие интегрируемости функции.

2. Достаточное условие интегрируемости функции:

Теорема 2 . Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$, т.е. предел (1.2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка интегрирования на частичные отрезки и от выбора точек ξ_i на этих отрезках.

3. Основные свойства определённого интеграла

1. $\int\limits_a^b k f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx, k = const$. **(1.3)**

2. $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$. **(1.4)**

3. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$ **(1.5)**

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. **(1.6)**

5. Если функция $f(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. Если функция $f(x) \leq \varphi(x)$ всюду на отрезке $[a,b]$, то

$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

7. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то

$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

8. Если M и m соответственно наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \qquad \textbf{(1.7)}$$

9. **<u>Теорема о среднем</u>.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдётся такая точка ξ, что справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \qquad \textbf{\textit{(1.8)}}$$

10. Для любых чисел a, b и c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad \textbf{\textit{(1.9)}}$$

если только все эти три интеграла существуют.

§ 2. Вычисление определённого интеграла

1. Формула Ньютона- Лейбница

<u>Теорема 1.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и функция $F(x)$ является её некоторой первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона- Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \qquad \textbf{\textit{(2.1)}}$$

- *Пример 1*. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{3} x^4 dx$.

$$\int_{-1}^{3} x^4 dx = \left[\begin{array}{l} \textit{Функция } f(x) = x^4 \textit{ непрерывна на отрезке} \\ [-1,3] \textit{ и функция } F(x) = \dfrac{x^5}{5} \textit{ - первообразная} \\ \textit{на этом отрезке для функци } f(x). \\ \textit{По теореме } 1 \textit{ получаем:} \end{array}\right] = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}.$$

Приемы вычисления определенных интегралов практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов. Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

2. Замена переменной в определённом интеграле

<u>Теорема 2</u>. Пусть $f(x)$- непрерывная функция на отрезке $[a,b]$.

Тогда, если:

1) функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$;

2) множеством значений $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ является отрезок $[a,b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad \textbf{\textit{(2.2)}}$$

Формула (2.2) называется формулой замены переменной в определённом интеграле.

- *Пример 2.*

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=t\Rightarrow\ x=t^2-1;\quad dx=2tdt\\ x=0\ \Rightarrow\ t=\sqrt{0+1}=1;\quad\ x=3\Rightarrow\ t=\sqrt{3+1}=2.\\ \textit{Т.к. функция } x=t^2-1 \textit{ непрерывна на } [1,2], \textit{ то по теореме} 2 \textit{ для}\\ \textit{неё существует первообразная на этом отрезке. Получаем:}\end{array}\right]=$$

$$=\int_1^2(t^2-1)t\cdot 2tdt=2\int_1^2(t^4-t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=2\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=6\frac{13}{15}.$$

- *Пример 3.*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left[f(x) = \frac{1}{2+\cos x} - \text{непрерывная и четная} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{При вычислении данного интеграла можно воспользоваться утверждением:} \\ -\text{если } f(x) \text{ на отрезке } [-a,a] \text{ непрерывная и четная, то } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx; \\ -\text{если } f(x) \text{ на отрезке } [-a,a] \text{ непрерывная, но нечетная, то } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \end{array} \right] =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left[\begin{array}{l} \text{Воспользуемся универсальной три}- \\ \text{гонометрической подстановкой:} \\ t = tg\frac{x}{2}; \Rightarrow x = 2arctg\, t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right] = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 4\int_{0}^{1} \frac{dt}{3+t^2} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg\,0 \right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

- *Пример 4.*

$$\int_{0}^{1} \frac{e^x dx}{4e^x + 12e^x + 34} = \left[\begin{array}{l} t = e^x;\quad dt = e^x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1;\quad x = 1 \Rightarrow t = e \\ \text{Т.к. функция } x = \ln t \text{ непрерывна на } [1, e], \text{ то} \\ \text{и новая подынтегральная функция } t = e^x \text{ также} \\ \text{непрерывна, и значит, для неё, по т.2, существует} \\ \text{первообразная на этом отрезке. Получаем:} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{1}^{e} \frac{dt}{4t^2 + 12t + 34} == \frac{1}{4}\int_{1}^{e} \frac{dt}{t^2 + 3t + \frac{17}{2}} = \left[\begin{array}{l} t^2 + 3t + \frac{17}{2} = t^2 + 2\cdot t\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{17}{2} - \frac{9}{4} = \\ = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}. \end{array} \right] =$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^e \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}arctg\left.\frac{2\left(t+\frac{3}{2}\right)}{5}\right|_1^e=\frac{1}{10}\left(arctg\frac{2e+3}{5}-arctg1\right)=$$

$$=\frac{1}{10}arctg\frac{2e+3}{5}-\frac{\pi}{40}.$$

3. Интегрирование по частям в определённом интеграле

<u>**Теорема 3**</u>. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad \textbf{\textit{(2.3)}}$$

- *Пример 5.*

$$\int_0^1 arctg\,x\,dx=\begin{bmatrix} u=arctg\,x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix}=x\,arctg\,x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2}=(1arctg1-0)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}.$$

§ 3. Геометрические приложения определённого интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции

Пусть дана плоскость Oxy.

<u>*Определение 1.*</u> Фигура, ограниченная отрезком $[a,b]$ оси Ox, прямыми $x=a,\ x=b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ (рис.1) называется к*риволинейной трапецией* с основанием $[a,b]$.

Найдём площадь данной фигуры. Разобьём этот отрезок на n произвольных частей точками:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.

Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку $\xi_i \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ и рассмотрим ступенчатую фигуру (рис. 1).

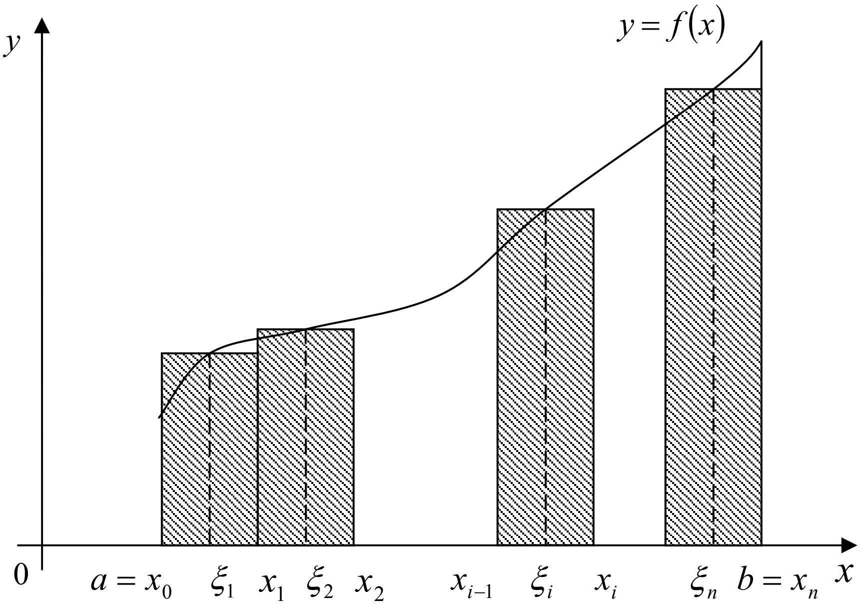


Рис. 1

Площадь криволинейной трапеции приближённо равна площади ступенчатой фигуры: $S \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. При $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ площадь ступенчатой фигуры стремится к площади криволинейной трапеции. С другой стороны, площадь ступенчатой фигуры является интегральной суммой для $f(x)$.

Т. к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то предел этой суммы существует при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ и равен интегралу от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$. Следовательно,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$. В этом заключается геометрический смысл определённого интеграла.

$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad \textbf{\textit{(3.1)}}$$

Замечание 1. Если функция $f(x)\le 0$ и непрерывна на всём отрезке $[a,b]$, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx\le 0$. По абсолютной величине он равен площади S соответствующей криволинейной трапеции (рис.2), т.е.

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_a^b f(x)dx. \qquad \textbf{\textit{(3.2)}}$$

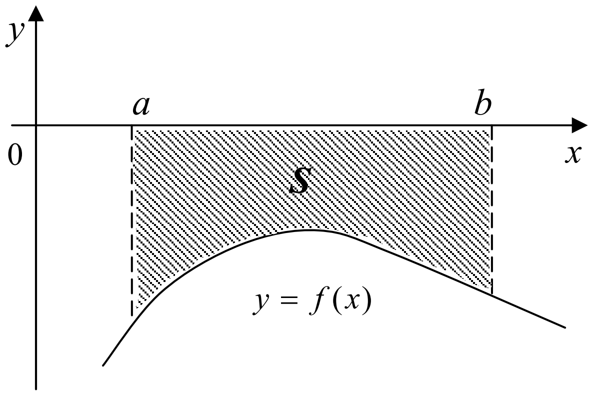


Рис. 2

Замечание 2. Если непрерывная функция $f(x)$ конечное число раз меняет свой знак на отрезке $[a,b]$, то интеграл по всему отрезку $[a,b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Тогда площадь криволинейной трапеции (рис.3) можно найти по формуле

$$S=\int_a^b |f(x)|dx. \qquad \textbf{\textit{(3.3)}}$$

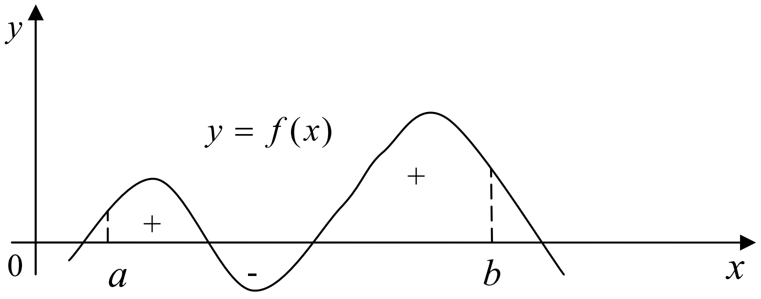


Рис. 3

Замечание 3. Если фигура ограничена снизу и сверху графиками функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ (рис.4), причем $f_1(x)\le f_2(x)$, $(f_1(x)\ge 0)$ для всех $x\in[a,b]$, то площадь данной фигуры определяется формулой

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx. \qquad \textbf{\textit{(3.4)}}$$

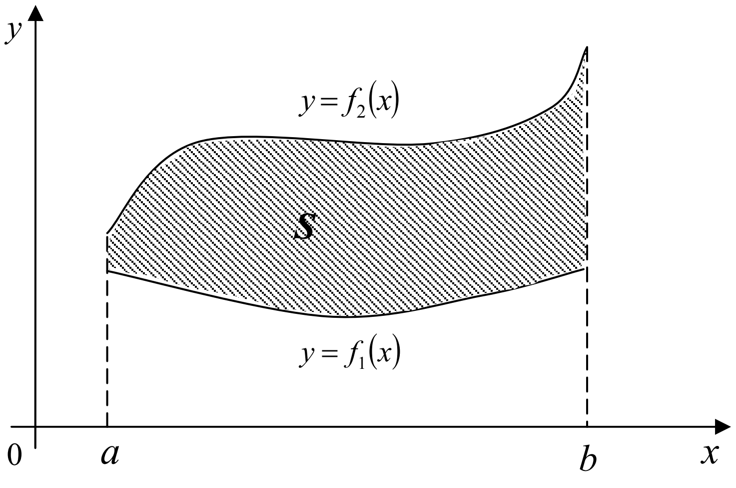


Рис. 4

Условие неотрицательности функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a,b]$ можно снять. Пусть m - наименьшее значение функции $f_1(x)$ на этом отрезке (рис.4.1), тогда функции $g_1(x)=f_1(x)+|m|$ и $g_2(x)=f_2(x)+|m|$ непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a,b]$

(рис.4.2). Значит, для вычисления площади данной фигуры можно воспользоваться формулой (3.4):

$$S=\int_a^b\left(g_2(x)-g_1(x)\right)dx=\int_a^b\left(f_2(x)+|m|-\left(f_1(x)+|m|\right)\right)dx=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Таким образом, формула (3.4) выполняется и в этом случае.

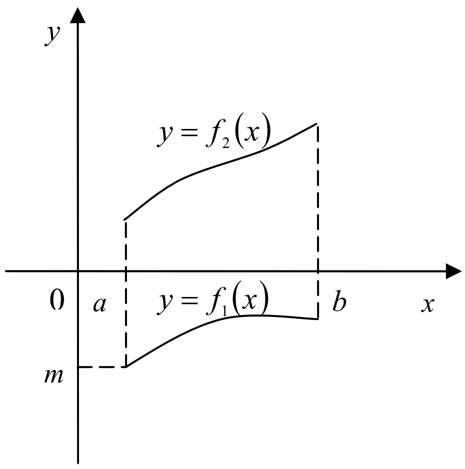


Рис. 4.1

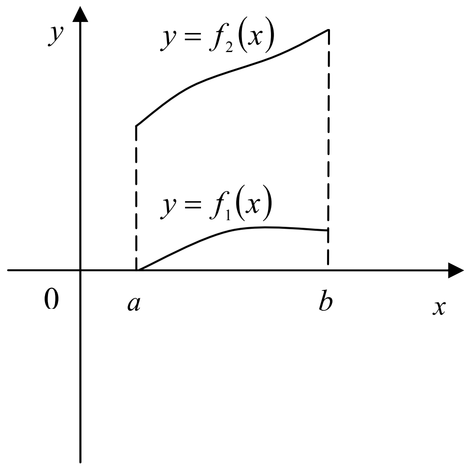


Рис. 4.2

- *Пример 1.*

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$y=x^2+1,\ y=0,\ x=1,\ x=4$.

Построим данную фигуру (рис.5). Построенная фигура является криволинейной трапецией.

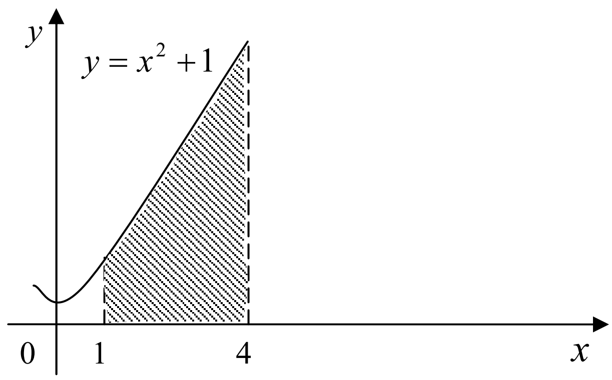


Рис. 5

Площадь заданной фигуры определяется по формуле

$$S=\int_1^4 \left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}+4\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right)=24.$$

- *Пример 2.*

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функции $y=2x$ и $y=3-x^2$.

Построим данную фигуру. Для начала найдём абсциссы точек пересечения прямой $y=2x$ и параболы $y=3-x^2$:

$$\begin{cases} y=2x, \\ y=3-x^2. \end{cases}$$

Подставляя из первого уравнения $y=2x$ во второе, получим квадратное уравнение $2x=3-x^2$ или $x^2+2x-3=0$. Решая его, находим корни $x_1=-3, x_2=1$ (абсциссы точек пересечения графиков функций). Строим прямую $y=2x$ и параболу $y=3-x^2$ (рис.6)

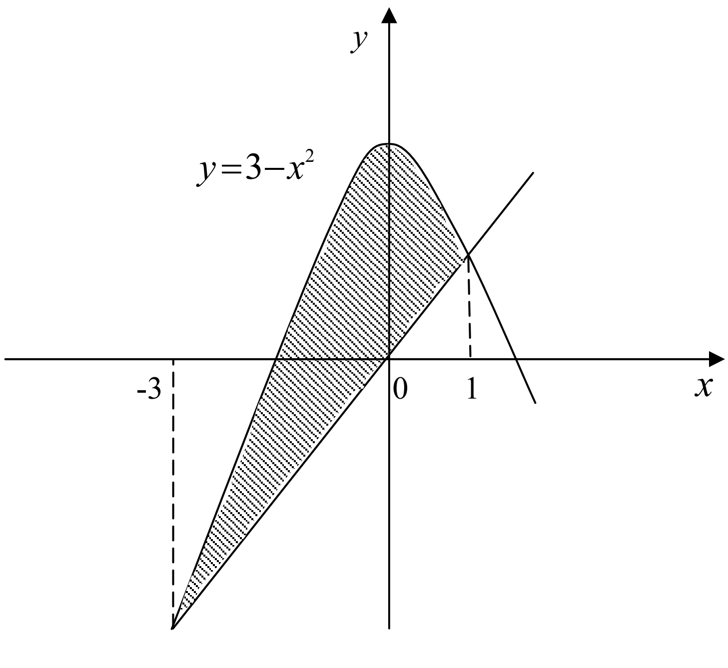


Рис.6

Площадь данной фигуры находим по формуле (3.4)

$$S=\int_{-3}^{1}\left(3-x^2-2x\right)dx=\left(3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1}=\left(3-\frac{1}{3}-1\right)-\left(-9-\frac{-27}{3}-9\right)=10\frac{2}{3}.$$

Если верхняя граница задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta$, причем $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, в (3.1) надо сделать замену переменной, приняв $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$. Тогда получим

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx=\left[\begin{array}{c} y=\psi(t)\\ x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\\ x=a\Rightarrow t=\alpha\\ x=b\Rightarrow t=\beta\end{array}\right]=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad \textbf{(3.5)}$$

- *Пример 3.*

Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

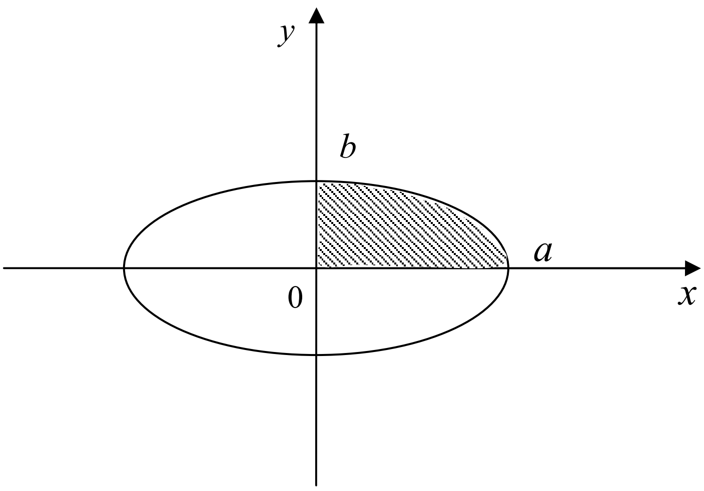


Рис. *7*

Эллипс симметричен относительно осей координат, поэтому достаточно вычислить площадь части фигуры, находящейся в I четверти (рис. 7). Т.к. $x\in[0,a]$, то

$a\cos\alpha=0,\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2};\quad a\cos\beta=a,\Rightarrow\beta=0$. Следовательно, по формуле (3.5) площадь фигуры равна

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\left(a\cos t\right)' dt = -4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\left(-\sin t\right)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \left[\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}\right] =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2t\right)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2ab\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = \pi ab.$$

Если $a = b = R$, то получаем известную формулу площади круга $S = \pi R^2$.

2. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна при $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис.8).

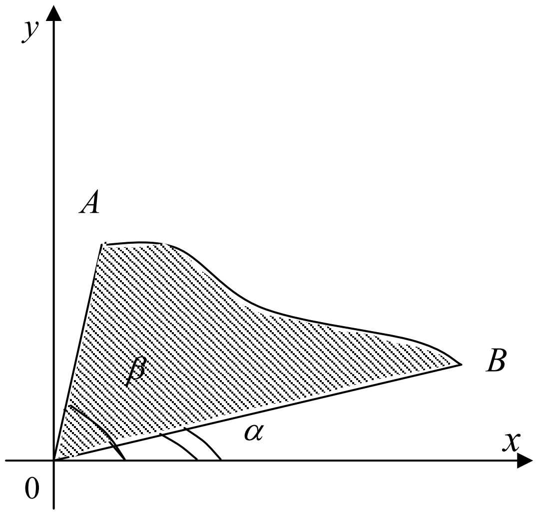


Рис. 8

<u>*Определение 2.*</u> Плоскую фигуру, ограниченную кривой AB и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, называют *криволинейным сектором*.

Площадь криволинейного сектора определяется формулой

$$S_{сек} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad \textbf{(3.6)}$$

- *Пример 4.*

Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда: $r = a\varphi$, где a - положительное число (рис.9).

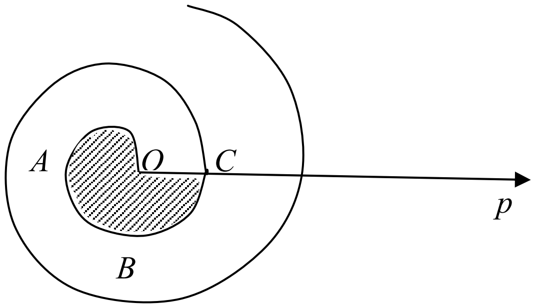


Рис. 9

При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$. По формуле *(3.6)* площадь сектора равна

$$S_{OABC} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

2. Длина дуги кривой

1. Длина дуги в декартовых координатах

Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, где $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$ (рис.10).

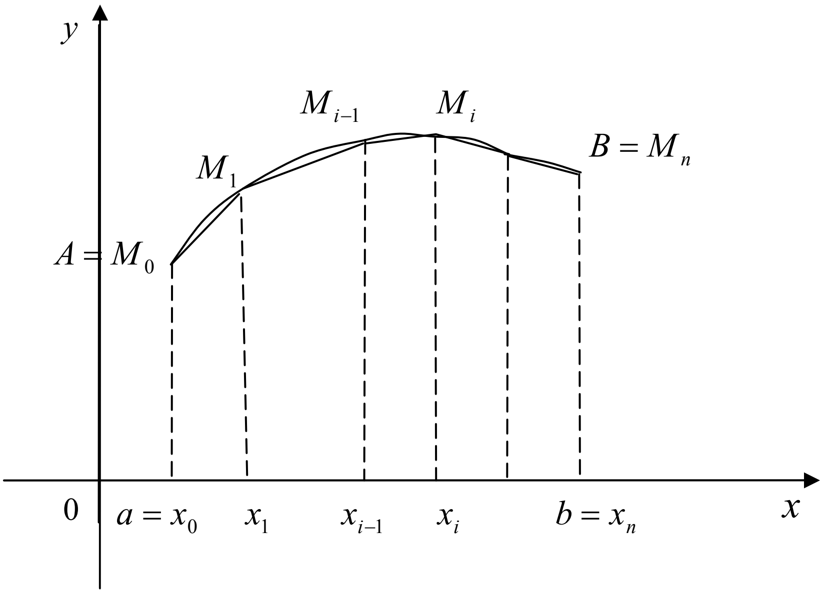


Рис.10

Разобьём кривую AB на n произвольных частей точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$. Соединив соседние точки хордами, получим ломаную $M_0M_1 \ldots M_{i-1}M_i \cdots M_n$, вписанную в дугу AB.

<u>*Определение 3.*</u> *Длиной дуги* AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю. Этот предел не зависит от выбора точек ломаной $M_0M_1 \ldots M_{i-1}M_i \cdots M_n$.

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$, то длина L дуги AB выражается формулой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx . \qquad \textbf{\textit{(3.7)}}$$

Обозначим через $(x_i, f(x_i))$ координаты точки M_i, так что для абсцисс этих точек получим: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.

Тогда длина l_i одного звена ломаной по теореме Пифагора равна

$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$.

По формуле Лагранжа $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\ x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

Следовательно, $l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Т.о., длина всей ломаной равна $L = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^{\,2}(\xi_i)}\,\Delta x_i$.

По условию $f'(x)$ непрерывна, следовательно, функция $\sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}$ тоже непрерывна. Поэтому существует предел написанной интегральной суммы, который равен определённому интегралу

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^{\,2}(\xi_i)}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\,dx .$$

- *Пример 5.*

Вычислить длину дуги верхней ветви полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$ от её вершины до точки $B(1,1)$ (рис. 11).

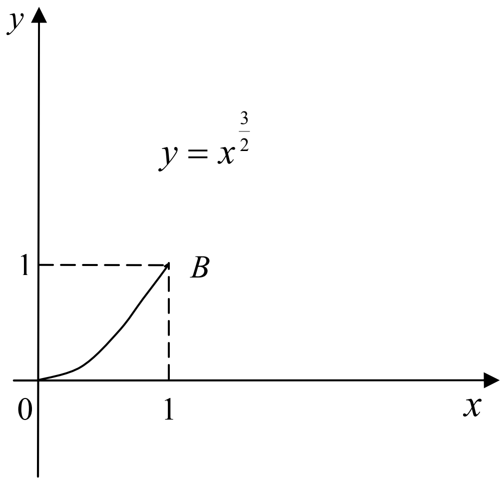


Рис. 11

Из уравнения $y = x^{\frac{3}{2}}$ находим: $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$. Следовательно, по формуле (3.7) получим

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^{\,2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{9}{4}dx =$$

$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{4+9}{4}\right)^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\frac{13^3}{64}} - 1\right) = \frac{8}{27}\cdot\frac{13\sqrt{13}}{8} - \frac{8}{27} = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

2. Длина дуги кривой, заданной параметрически

Для вычисления длины дуги в случае, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta$, причем $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$, в *(3.7)* надо сделать замену переменной, приняв $x=\varphi(t), y=\psi(t), dx=\varphi'(t)dt$. Тогда получим

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^{\,2}(t)+\psi'^{\,2}(t)}\,dt. \qquad \textbf{(3.8)}$$

- *Пример 6.*

Вычислить длину дуги одной арки циклоиды.

$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$ (рис.12).

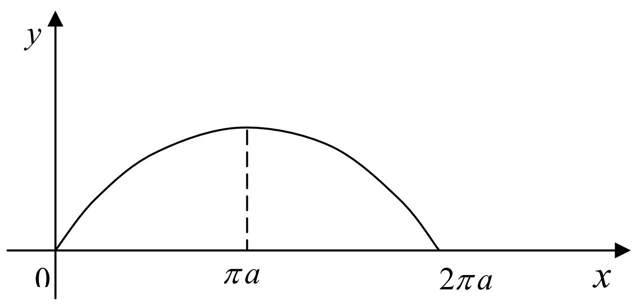


Рис. 12

Из уравнений циклоиды находим: $\varphi'(t)=a(1-\cos t), \psi'(t)=a\sin t$.

Т.к. $x\in[0,2\pi a]$, то t при этом изменяется $[0,2\pi]$. Следовательно, по формуле ***(3.8)*** длина дуги равна

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\left[2\sin^2\frac{t}{2}=1-\cos t\right]=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$=8a$.

3. Длина дуги в полярных координатах

Для вычисления длины дуги в случае, когда кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi), \alpha\le\varphi\le\beta$, где $r(\varphi)$

имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ при $\varphi \in [\alpha, \beta]$, необходимо воспользоваться формулами связи полярных и декартовых координат $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Считая x и y функциями, зависящими от параметра φ,

где $\begin{cases} x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi, \end{cases}$ воспользуемся формулой (3.8), тогда получим

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(\varphi)\cos^2\varphi - 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi + r'^2(\varphi)\sin^2\varphi + \overline{+ 2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + r^2(\varphi)\cos^2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(\varphi)\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2(\varphi)\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}\,d\varphi = \left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\right] =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Таким образом, длина дуги в полярных координатах вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad \textbf{\textit{(3.9)}}$$

- *Пример 7.*

Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$ (рис. 13).

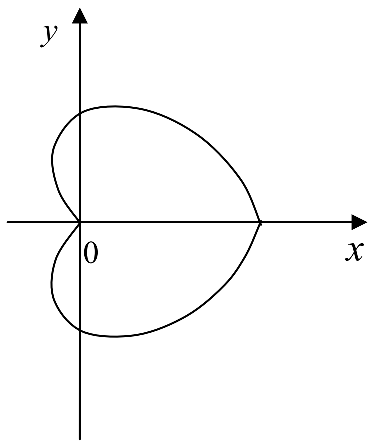


Рис. 13

Кардиоида симметрична относительно полярной оси, поэтому достаточно вычислить длину дуги, находящейся над полярной осью $(0 \le \varphi \le \pi)$. Из уравнения кардиоиды находим: $r'(\varphi) = -a \sin \varphi$.

По формуле (3.9) длина искомой дуги равна

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= \left[2\cos^2\frac{\varphi}{2} = 1+\cos\varphi \right] = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

3. Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 14).

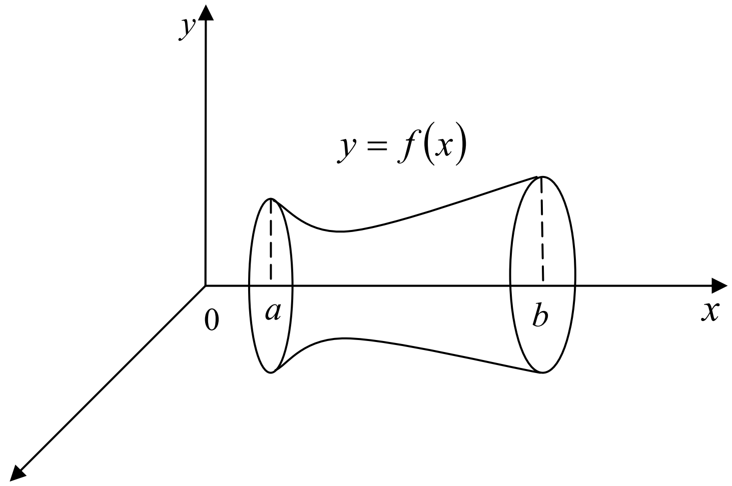


Рис. 14

Разобьём этот отрезок на n произвольных частей точками:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.

На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ построим прямоугольник (рис. 15).

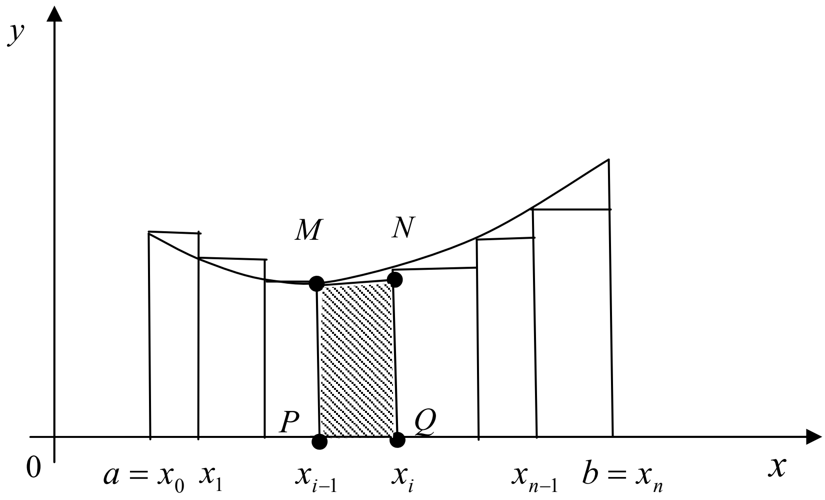


Рис. 15

При вращении вокруг оси Ox каждый прямоугольник опишет цилиндр. Объём i – ого цилиндра, образованного вращением прямоугольника $PMNQ$, равен:

$v_i = \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сумма объёмов всех n цилиндров приближённо равна объёму данного тела вращения: $V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i$.

С другой стороны, эта сумма является интегральной суммой для интеграла $\pi \int_a^b f^2(x) dx$. Так как функция $f^2(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$ существует и равен определённому интегралу. Таким образом,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx . \qquad \textbf{\textit{(3.10)}}$$

Замечание 1. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$, прямыми $x = a, x = b$, выражается интегралом:

$$V = \pi \int_a^b \left((f_2(x))^2 - (f_1(x))^2 \right) dx .$$

Замечание 2. Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, построенной на отрезке $[c, d]$ оси ординат и ограниченной кривой $x = f(y)$, вычисляется по формуле: $V = \pi \int_c^d f^2(y) dy$.

Замечание 3. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta$, причем $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то объём тела вращения вокруг оси Ox определяется по формуле:

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (\psi(t))^2 \varphi'(t) dt . \qquad \textbf{(3.11)}$$

- *Пример 8.*

Найти объём тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривой $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, вокруг оси Ox (рис. 16).

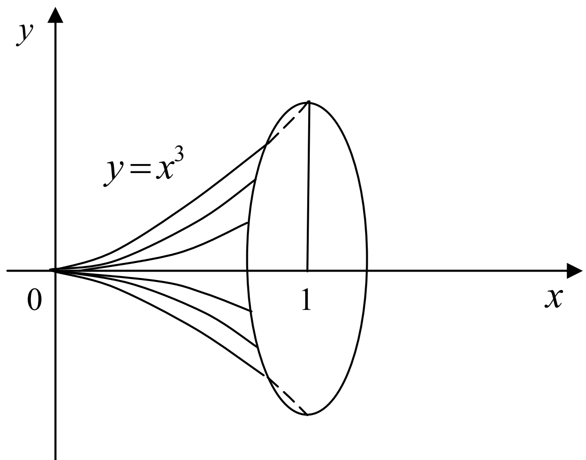


Рис. 16

На основании формулы ***(3.10)*** искомый объём равен

$$V=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^3dx=\pi\int_0^1 x^6dx=\pi\frac{x^7}{7}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{7}.$$

- *Пример 9.*

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y=\sin x$, осью ординат и прямой $y=1$ (рис.17).

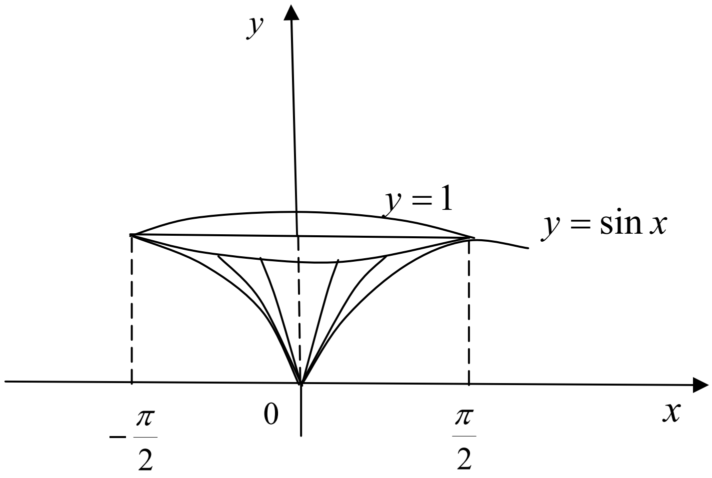


Рис. 17

Так как тело вращается вокруг оси Oy, то для вычисления объема тела рассматриваем функцию, обратную данной, $x=\arcsin y$ на отрезке $[0,1]$. Согласно формуле, указанной в замечании 2, получаем:

$$V=\pi\int_0^1(\arcsin y)^2dy=\begin{bmatrix} y=\sin t;\, dy=\cos t\,dt \\ y=0\Rightarrow t=0 \\ y=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,dt==$$

$$=\begin{bmatrix} u=t^2; & du=2t\,dt \\ dv=\cos t\,dt; & v=\sin t\,dt\end{bmatrix}=\pi\left(t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\sin t\,dt\right)=\begin{bmatrix} u=2t; & du=2dt \\ dv=\sin t\,dt; & v=-\cos t\end{bmatrix}=$$

$$=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-2t(-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)dt\right)=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)=\pi\frac{(\pi^2-8)}{4}.$$

- *Пример 10.*

Найти объём тела, ограниченного поверхностью, полученной в результате вращения одной арки циклоиды

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$ (рис. 18).

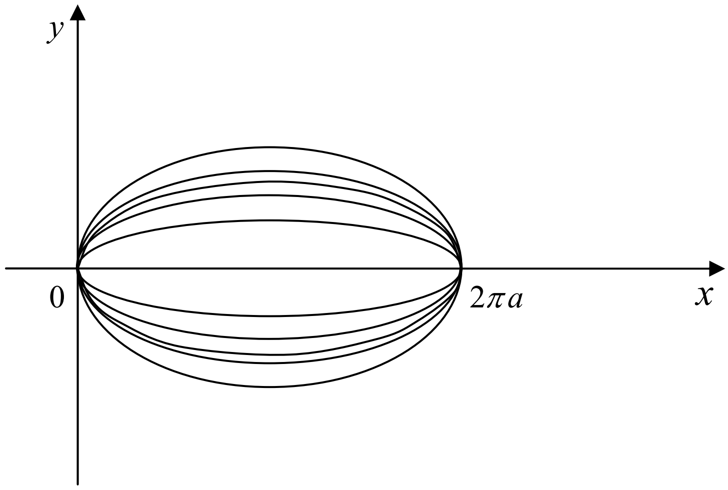


Рис. 18

Из уравнений циклоиды находим: $\varphi'(t)=a(1-\cos t)$. Т.к. t изменяется $[0,2\pi]$, то по формуле (3.11) объём тела вращения равен:

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(a(1-\cos t))^2\,a(1-\cos t)dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=$$

$$\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt==\pi a^3\left(\int_0^{2\pi}dt-3\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt-\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt\right)=$$

$$=\pi a^3(I_1-3I_2+3I_3-I_4).$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2, стоящие в правой части написанного выше равенства:

1) $I_1=\int_0^{2\pi}dt=t\Big|_0^{2\pi}=2\pi-0=2\pi$;

2) $I_2=\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=\sin t\Big|_0^{2\pi}=\sin 2\pi-\sin 0=0$;

3) $I_3=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\left[\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}\right]=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t\,)dt=$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{2\pi}dt+\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\,dt\right)=\frac{1}{2}\left(t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{2}\left((2\pi-0)+\frac{1}{2}(\sin 4\pi-\sin 0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi;$$

4) $I_4=\int\limits_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\cos t\,dt=\left[\cos^2 t=1-\sin^2 t\right]=\int\limits_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\cos t\,dt=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\cos t\,dt-\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t dt=\sin t\Big|_0^{2\pi}-\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\sin 2\pi-\sin 0-\frac{1}{3}\left((\sin 2\pi)^3-(\sin 0)^3\right)=0.$$

Следовательно,

$V=\pi a^3(2\pi-3\cdot 0+3\pi-0)=5\pi^2 a^3$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

1-10. Вычислить определённые интегралы.

1. *а*) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx;$ *б*) $\int_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}};$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-2\cos x+3\sin x}dx;$ *г*) $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx.$

2. *а*) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx;$ *б*) $\int_2^1 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}dx;$

в) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x-3\sin^2 x}dx;$ *г*) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx.$

3. *а*) $\int_1^{\sqrt{3}} x^2\sqrt[3]{(3-x^3)^2}\,dx;$ *б*) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+7\cos x};$ *г*) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx.$

4. *а*) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4};$ *б*) $\int_0^3 \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+3\cos^2 x};$ *г*) $\int_0^3 (x-3)e^{-x}\,dx.$

5. *а*) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;$ *б*) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)};$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x+\sin^2 x}dx;$ *г*) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx.$

6. *а*) $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}\,dx;$ *б*) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}};$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx;$ *г*) $\int_1^e x^2\ln x\,dx.$

7. а) $\int_{2}^{8}\frac{dx}{x^2+6x+8}$; б) $\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt{3x+1}}$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+\sin x}{2-\cos x}dx$; г) $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\,arcctg\,x\,dx$.

8. а) $\int_{0}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$; б) $\int_{-4}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{(5-x)^3}}$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos 4x\,dx$.

9. а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$; б) $\int_{2}^{14}\frac{5x\,dx}{\sqrt{x+2}}$;

в) $\int_{0}^{arctg\,2}\frac{(3tg\,x-1)dx}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$; г) $\int_{1}^{e}x^2\ln 2x\,dx$.

10. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sin^5 x}$; б) $\int_{3}^{8}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$;

в) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin x-\cos x}$; г) $\int_{1}^{2}\ln(3x+2)dx$.

11-20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

11. а) $y=2x-x^2$, $y=-2x^2+4x$,

б) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=4\sqrt{2}\sin^3 t. \end{cases}$

12. а) $y=x^2-2x$, $3x-1-y=0$,

б) $r=2\sin 3\varphi$.

13. а) $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$,

б) $r=1+\sin 2\varphi$.

14. а) $y=2x-x^2$, $y+x=0$,

б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y = 0,\ 0 \le t \le 2\pi$.

15. *а)* $y = x^2 - 3x,\ y + 3x - 4 = 0$,

б) $r = 2\cos\varphi,\ r = \cos\varphi$.

16. *а)* $xy = 4,\ x + y - 5 = 0$,

б) $r = 3 - \sin\varphi$.

17. *а)* $3x^2 - 4y = 0,\ 2x + 4y - 1 = 0$,

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

18. *а)* $y = x^2 - 6,\ y = -x^2 + 5x - 6$,

б) $r = 3\sin 4\varphi$.

19. *а)* $y = x^2 + 4x,\ x - y + 4 = 0$,

б) $r = 2(1 + \cos\varphi)$.

20. *а)* $xy = 2,\ y = 3 - x$,

б) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t. \end{cases}$

21-30. Вычислить длину дуги кривой.

21. *а)* $y = x^2 - 1$, *отсеченной осью* Ox;

б) $r = 3(1 - \cos\varphi),\ \dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi$.

22. *а)* $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$;

б) $\begin{cases} x = 2(t\sin t + \cos t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

23. *а)* $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{(2x - 1)^3},\ 2 \le x \le 8$;

б) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$

24. *а)* $y = \ln\cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$;

б) $r = 3\cos\varphi$.

25. *а)* $y^2 = x^3$, *от точки* $A(0,0)$ *до точки* $B(4,8)$;

б) $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

26. *а)* $y = e^x,\ 0 \le x \le 1$;

б) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 5\sin^2 t, \end{cases} 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

27. *а)* $y = \ln\sin x,\ \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$;

б) $r = 1 + \sin\varphi,\ \dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

28. *а)* $y^2 = (x+1)^3$, *отсеченной прямой* $x = 4$;

б) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

29. *а)* $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2},\ 0 \le x \le \dfrac{15}{16}$;

б) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\,t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

30. *а)* $y = 4 - x^2$, *отсеченной осью* Ox;

б) $r = 2\sin^3 \dfrac{\varphi}{3},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

31-40. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси координат фигуры, ограниченной данными линиями.

31. $y=2-\dfrac{x^2}{2},\ x+y=2,$ *вокруг оси* Oy.

32. $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=5\sin t, \end{cases}$ *вокруг оси Ox.*

33. $y=x^2,\ x=y^2,$ *вокруг оси Oy.*

34. $y=e^x,\ x=0,\ x=\ln 2,$ *вокруг оси Ox.*

35. $xy=4,\ y=0,\ x=1,\ x=4,$ *вокруг оси* Ox.

36. $y=1+8x^3,\ x=-\dfrac{1}{2},\ y=1,$ *вокруг оси* Ox.

37. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ *вокруг оси* Ox.

38. $y=2^x,\ y=\dfrac{5+3x}{4},$ *вокруг оси Ox.*

39. $x=\sqrt{1-y^2},\ y=\sqrt{\dfrac{3}{2}}x,\ y=0,$ *вокруг оси Ox.*

40. $y=2\sin x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi,$ *вокруг оси Ox.*

<u>ГЛАВА 3</u>. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Несобственные интегралы

В определении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось следующее:

1) отрезок интегрирования $[a,b]$ конечен;

2) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ (см. гл.2,§1).

Если хотя бы одно из условий не выполнено, то данное выше определение теряет смысл. Так, в случае бесконечного отрезка интегрирования нельзя разбить отрезок на n частей конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Однако и на эти случаи можно обобщить понятие определенного интеграла, в результате чего и появилось понятие несобственного интеграла.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$, т.е. существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при любом $b>a$.

<u>*Определение 1.*</u> Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ***(7.1)***

Следовательно, по определению, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

В этом случае говорят, что несобственный интеграл (7.1) существует или сходится. Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b\to+\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла в случае, когда $f(x)\geq 0$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, по аналогии с определенным (см. гл.3,§3,п.1), выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y=f(x)$, $x=a$ и осью Ox (рис.1).

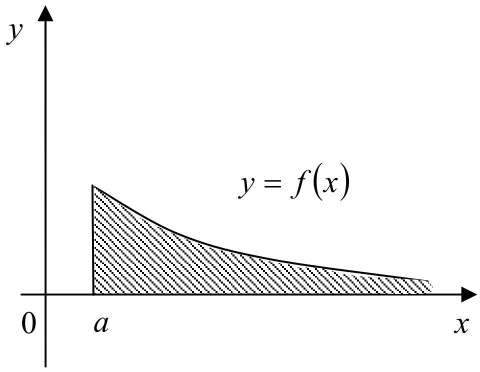


Рис. 1

Аналогичным образом для функции $f(x)$, определенной на бесконечном промежутке $(-\infty, b]$ и интегрируемой по любому отрезку $[a,b]$ (при любом $a<b$), определяется несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования можно представить как сумму двух интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \text{ или } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

где c - любое число.

Интеграл в левой части равенства существует (сходится) при условии, что оба интеграла в правой части существуют (сходятся).

- *Пример 1.*

Вычислить следующие несобственные интегралы с бесконечными пределами или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int_{-\infty}^{1} e^{2x}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение.

а) По определению несобственного интеграла находим:

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e}^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

Вычислим

$$\int_{e}^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{bmatrix} \ln x = t;\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1; \\ x = b \Rightarrow t = \ln b \end{bmatrix} = \int_{1}^{\ln b} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Bigg|_{1}^{\ln b} = -\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln e} = 1 - \frac{1}{\ln b}.$$

В результате получим:

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e}^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln b}\right) = \left[\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}\right) = 0\right] = 1.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

б) По определению,

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1} e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_{a}^{1} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(e^2 - e^a\right) = \left[\lim_{a\to-\infty} e^a = 0\right] = \frac{1}{2}e^2.$$

Данный интеграл сходится.

в) По определению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+5}$$ (вместо точки $x=0$ в качестве промежуточного предела интегрирования можно взять любую другую конечную точку оси Ox)

Вычислим каждый из пределов, стоящих в правой части написанного выше равенства:

1)

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+5}=\begin{bmatrix} x^2+2x+5= \\ =(x^2+2\cdot x\cdot 1+1)+4= \\ =(x+1)^2+4 \end{bmatrix}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\bigg|_a^0=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(arctg\frac{1}{2}-arctg\frac{a+1}{2}\right)=\left[\lim_{a\to-\infty}arctg\frac{a+1}{2}=-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

2)

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\bigg|_0^b=\frac{1}{2}\left(arctg\frac{b+1}{2}-arctg\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left[\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{b+1}{2}=\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$ сходится.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,c)$ и не ограничена вблизи точки c, но является ограниченной и интегрируемой на отрезке $[a,b]$, $a\le b<c$, т.е. существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Определение 2. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to c-0} \int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_a^c f(x)dx$. ***(7.2)***

Следовательно, по определению, $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b \to c-0} \int\limits_a^b f(x)dx$ (символ $b \to c-0$ означает, что b стремится к c слева).

Если предел, стоящий справа, существует, то несобственный интеграл (7.2) сходится, в противном случае интеграл расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла в случае, когда $f(x) \geq 0$ и интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ сходится, выражает площадь неограниченной области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$, осью Ox и бесконечно простирающейся вверх вдоль прямой $x = c$ (рис.2).

Аналогично определяются интегралы в следующих случаях:

1. Если функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(c,b]$ и не ограничена вблизи точки c, но является ограниченной и интегрируемой на отрезке $[a,b]$, $c < a \leq b$, т. е. существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то $\int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{a \to c+0} \int\limits_a^b f(x)dx$ (символ $a \to c+0$ означает, что a стремится к c справа).

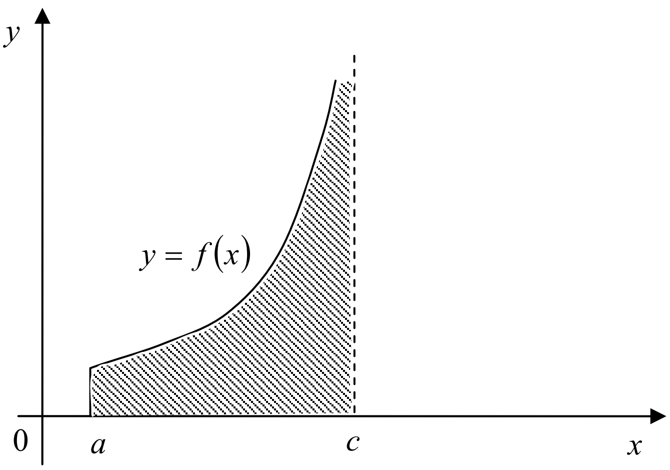


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c \in [a,b]$, то при условии существования обоих интегралов справа, по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

В этом случае интеграл слева сходится, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

3. Если функция $f(x)$ не ограничена вблизи точек a и b то, если оба интеграла справа существуют, несобственный интеграл определяется как сумма

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где c - любая точка из интервала (a,b).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, и существует функция $F(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, для которой $F'(x) = f(x)$, кроме конечного числа точек, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ - обобщенная первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

- *Пример 2.*

Исходя из определения, вычислить следующие несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^5}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; в) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}}$;

г) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{(x-2)^5}$ не ограничена в окрестности точки $x=2$, но является ограниченной и интегрируемой на любом отрезке $[0,b]$, $0\le b<2$, т.е. существует определенный интеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{(x-2)^5}$. Согласно определению 2, находим:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^5} = \lim_{b\to 2-0}\int\limits_0^b \frac{dx}{(x-2)^5} = \lim_{b\to 2-0}\int\limits_0^b (x-2)^{-5}dx = \lim_{b\to 2-0}\left.\frac{(x-2)^{-4}}{-4}\right|_0^b =$$

$$\lim_{b\to 2-0}\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(b-2)^4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(0-2)^4}\right) = \lim_{b\to 2-0}\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(b-2)^4}\right) =$$

$$=\left[\frac{1}{4}\lim_{b\to 2-0}\frac{1}{(b-2)^4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2-0-2)^4} = \infty\right] = -\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

б) Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x=1$ и интегрируема на любом отрезке $[a,e]$, $0<a\le e$. Поэтому, по определению,

$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{a\to 1+0}\int\limits_a^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$. Для вычисления определенного интеграла, стоящего в правой части равенства, воспользуемся формулой замены переменной:

$$\int_a^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \left[\begin{array}{l} \ln x = t;\, dt = \dfrac{dx}{x} \\ x = a \Rightarrow t = \ln a; \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{array}\right] = \int_{\ln a}^{1} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{3}{2}\cdot(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Big|_{\ln a}^{1} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1^2} - \sqrt[3]{(\ln a)^2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{(\ln a)^2}\right).$$

В результате чего имеем:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{a\to 1+0}\int_a^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{a\to 1+0}\frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{(\ln a)^2}\right) = \frac{3}{2}\lim_{a\to 1+0}\left(1 - \sqrt[3]{(\ln a)^2}\right) = \left[\lim_{a\to 1+0}\sqrt[3]{(\ln a)^2} =\right.$$

$$\left. = \sqrt[3]{(\ln(1+0))^2} = 0\right] = \frac{3}{2}\cdot(1-0) = \frac{3}{2}.$$

Данный интеграл сходится.

в) Здесь подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[-1, 2]$. Поэтому, согласно определению,

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}}$$

Вычислим каждое слагаемое в отдельности:

1)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}} = \lim_{b\to 1-0}\int_{-1}^{b} \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}} = \lim_{b\to 1-0}\int_{-1}^{b}(x-1)^{-\frac{2}{7}}\,dx = \lim_{b\to 1-0}\frac{7}{5}(x-1)^{\frac{5}{7}}\Big|_{-1}^{b} = \frac{7}{5}\lim_{b\to 1-0}\sqrt[7]{(x-1)^5}\Big|_{-1}^{b} =$$

$$= \frac{7}{5}\lim_{b\to 1-0}\left(\sqrt[7]{(b-1)^5} - \sqrt[7]{(-1-1)^5}\right) = \frac{7}{5}\lim_{b\to 1-0}\left(\sqrt[7]{(b-1)^5} - \sqrt[7]{-32}\right) =$$

$$= \left[\lim_{b\to 1-0}\sqrt[7]{(b-1)^5} = \sqrt[7]{(1-0-1)^5} = 0\right] = \frac{7}{5}\cdot\left(0 + \sqrt[7]{32}\right) = \frac{7\sqrt[7]{32}}{5};$$

2)

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}} = \lim_{a\to 1+0}\int_{a}^{2} \frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}} = \lim_{a\to 1+0}\frac{7}{5}(x-1)^{\frac{5}{7}}\Big|_{a}^{2} = \frac{7}{5}\lim_{a\to 1+0}\left(\sqrt[7]{(2-1)^5} - \sqrt[7]{(a-1)^5}\right) =$$

$$= \left[\lim_{a\to 1+0}\sqrt[7]{(a-1)^5} = \sqrt[7]{(1+0-1)^5} = 0\right] = \frac{7}{5}\cdot(1-0) = \frac{7}{5}.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}}=\frac{7\sqrt[7]{32}}{5}+\frac{7}{5}=\frac{7}{5}\cdot\left(\sqrt[7]{32}+1\right).$$

Таким образом, интеграл $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[7]{(x-1)^2}}$ сходится.

г) Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точек $x=1$ и $x=3$. Согласно определению, находим:

$\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}+\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ (вместо точки $x=2$ можно взять любую другую внутреннюю точку отрезка $[1,3]$).

Вычислим каждый из интегралов, стоящих в правой части написанного выше равенства:

1) $$\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\lim_{a\to1+0}\int_{a}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\begin{bmatrix}4x-x^2-3=-\left(x^2-4x+3\right)=\\=-\left(\left(x^2-2\cdot x\cdot2+2^2\right)-2^2+3\right)=\\=-\left((x-2)^2-1\right)=1-(x-2)^2\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{a\to1+0}\int_{a}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}=\lim_{a\to1+0}\arcsin(x-2)\Big|_{a}^{2}=\lim_{a\to1+0}\left(\arcsin(2-2)-\arcsin(a-2)\right)=$$

$$=\lim_{a\to1+0}\left(\arcsin0-\arcsin(a-2)\right)=\begin{bmatrix}\lim\limits_{a\to1+0}\arcsin(a-2)=\arcsin(1+0-2)=\\=\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2};$$

2)

$$\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\lim_{b\to3-0}\int_{2}^{b}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\lim_{b\to3-0}\int_{2}^{b}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}=\lim_{b\to3-0}\arcsin(x-2)\Big|_{2}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to3-0}\left(\arcsin(b-2)-\arcsin(2-2)\right)=\begin{bmatrix}\lim\limits_{b\to3-0}\arcsin(b-2)=\arcsin(3-0-2)=\\=\arcsin(1)=\dfrac{\pi}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Данный интеграл сходится.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

1-10. Вычислить следующие несобственные интегралы или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

1. *а)* $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$, *б)* $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x\,dx}{x^2 - 1}$.

2. *а)* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 12}}$, *б)* $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} tg\,x\,dx$.

3. *а)* $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln x - 1}}$, *б)* $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{10x - 25 - x^2}$.

4. *а)* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{2x}\,dx$, *б)* $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4 - x)^2}}$.

5. *а)* $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctg\,4x}{16x^2 + 1}dx$, *б)* $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

6. *а)* $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{5 + 3\sin x}dx$, *б)* $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

7. *а)* $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{1-x}\,dx$; *б)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$.

8. *а)* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; *б)* $\int\limits_{1,5}^{2} \frac{dx}{(2 - x)\ln^2(2 - x)}$.

9. *а)* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(8 + x^2)^3}}$; *б)* $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{4 - x^2}$.

10. *а)* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(3 + x)\ln^5(3 + x)}$; *б)* $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(3 - x^2)^5}}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Основные формулы и свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций

1. Основные тождества

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

$tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}; \quad 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}; \quad 1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x};$

$tgx \cdot ctgx = 1,\ x \neq \dfrac{\pi n}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin(\arcsin x) = x,\ \ x \in [-1; 1];$

$\arcsin(\sin x) = x,\ \ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right];$

$\cos(\arccos x) = x,\ \ x \in [-1; 1];$

$\arccos(\cos x) = x,\ \ x \in [0; \pi];$

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ \ x \in [-1; 1];$

$tg(arctg\, x) = x,\ \ x \in R;$

$arctg(tg\, x) = x,\ \ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right];$

$ctg(arcctg\, x) = x,\ \ x \in R;$

$arcctg(ctg\, x) = x,\ \ x \in (0, \pi);$

$arctg\, x + arcctg\, x = \dfrac{\pi}{2},\ \ x \in R.$

2. Формулы двойного аргумента

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$

$$tg\,2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x},\ \ x\neq\frac{\pi}{2}=\pi n,\ \ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},m,n\in Z;$$

$$ctg\,2x=\frac{ctg^2x-1}{2\,ctg\,x},\ \ x\neq\frac{\pi n}{2},n\in Z;$$

$$\sin 2x=\frac{2tg\,x}{1+tg^2x},\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z;$$

$$\cos 2x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x},\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z.$$

3. Формулы понижения степени

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$(\cos x\pm\sin x)^2=1\pm\sin 2x;$$

$$\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x);$$

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x-\cos 3x).$$

4. Формулы сложения аргументов

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\quad \alpha,\beta\in R;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\quad \alpha,\beta\in R;$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm ctg\beta}{1\mp tg\beta tg\alpha},\quad \begin{cases}\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z,\\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,m\in Z,\\ \alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z;\end{cases}$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\,\alpha ctg\,\beta\mp 1}{ctg\,\beta\pm ctg\,\alpha},\quad \begin{cases}\alpha\neq\pi n,n\in Z,\\ \beta\neq\pi m,m\in Z,\\ \alpha\pm\beta\neq\pi k,k\in Z.\end{cases}$$

5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму (разность)

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

6. Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

7. Таблица основных значений тригонометрических функций

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ctgx	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

8. Таблица основных значений обратных тригонометрических функций

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

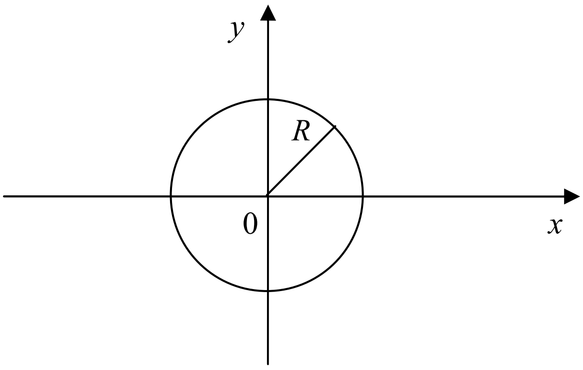
x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\infty$
arctgx	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
arcctgx	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Примеры некоторых кривых и их уравнений

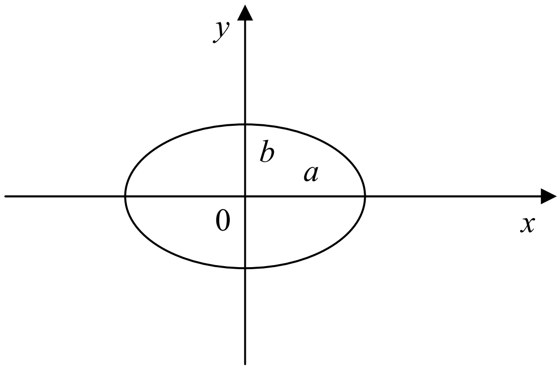
1. Окружность

$x^2 + y^2 = R^2$ или $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$



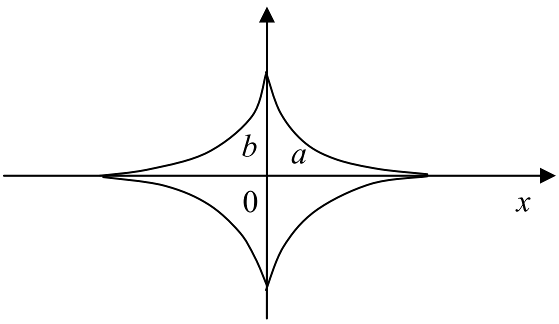
2. Эллипс

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$



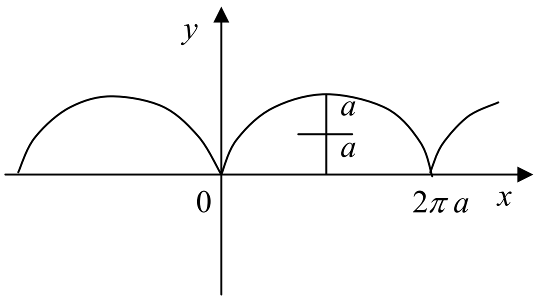
3. Астроида

$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$



4. Циклоида

$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$



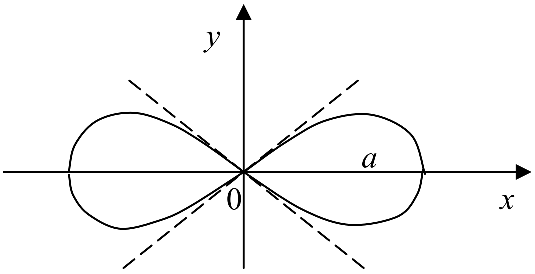
4. Лемниската Бернулли

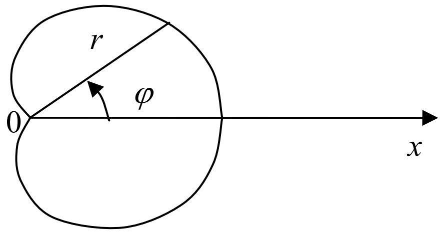
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ или

$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

5. Кардиоида

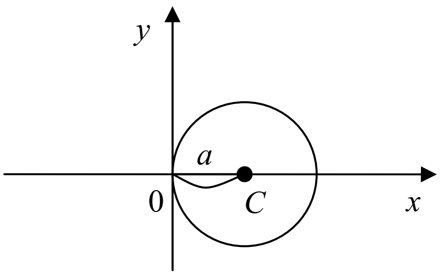
$r = a\cos\varphi$





5. Окружность со смещенным центром по оси Ox

$(x-a)^2+y^2=a^2$ или $r=2a\cos\varphi$



6. Окружность со смещенным центром по оси Oy

$x^2+(y-a)^2=a^2$ или $r=2a\sin\varphi$